

小波图象去噪综述

谢杰成 张大力 徐文立

(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘要 小波图象去噪已经成为目前图象去噪的主要方法之一。在对目前小波去噪文献进行理解和综合的基础上, 首先通过对小波去噪问题的描述, 揭示了小波去噪的数学背景和滤波特性; 接着分别阐述了目前常用的3类小波去噪方法, 并从小波去噪中常用的小波系数模型、各种小波变换的使用、小波去噪和图象压缩之间的联系、不同噪声场合下的小波去噪等几个方面, 对小波图象去噪进行了综述; 最后, 基于对小波去噪问题的理解, 提出了对小波去噪方法的一些展望

关键词 小波去噪 小波萎缩 小波变换 图象压缩

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)03-0209-09

Overview on Wavelet Image Denoising

XIE Jie-cheng, ZHANG Da-li, XU Wen-li

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Wavelet image denoising has been well acknowledged as an important method of image denoising. Based on many literatures of wavelet denoising, this paper attempts to make an overview of wavelet image denoising. First, it describes wavelet denoising in two ways, one from its mathematics background, the other from filter theory of signal processing. Then this paper classifies wavelet image denoising methods into three classes that includes shrinkage-based method, projection-based method, and correlation-based method, and describes them respectively. Considering the important role that coefficient model plays in a wavelet-based denoising scheme, this paper also discusses three kinds of wavelet coefficient model, including intra-level model, inter-level model, and hybrid model that combine the first two together. Usage of simultaneous wavelet transformations, the relationship between wavelet image denoising and wavelet image compression and wavelet denoising under different noise models are also covered here in order to give an overview as complete as possible. At the end, the future trend of wavelet image denoising is pointed out, though, in personal opinion.

Keywords Wavelet denoising, Wavelet shrinkage, Wavelet transformation, Image compression

0 引言

一般来说, 现实中的图象都是带噪图象, 所以为了后续更高层次的处理, 很有必要对图象进行去噪。图象去噪, 是一个古老的课题, 而人们也根据实际图象的特点、噪声的统计特征和频谱分布的规律, 发展了各式各样的去噪方法, 其中最为直观的方法是根据噪声能量一般集中于高频, 而图象频谱则分布于

一个有限区间的这一特点, 采用低通滤波方式来进行去噪的方法, 例如滑动平均窗滤波器, 还有 Wiener 线性滤噪器等。其他的去噪方法还有基于秩-阶滤波(排序量)的方法^[1-6], 基于马尔可夫场模型^[7]和基于偏微分方程(PDE, Partial Differential Equation)的方法^[8,9]和 L_p 正则化^[10]方法等。

近年来, 小波理论得到了非常迅速的发展, 而且由于其具备良好的时频特性, 因而实际应用也非常广泛。在去噪领域中, 小波理论也同样受到了许多学者

基金项目: 清华大学 985 项目

收稿日期: 2001-06-12; 改回日期: 2001-10-08



的重视,他们应用小波进行去噪,并获得了非常好的效果^[11~18],具体来说,小波去噪方法的成功主要得益于小波变换具有如下特点^[19]:(1)低熵性,小波系数的稀疏分布,使得图象变换后的熵降低;(2)多分辨率,由于采用了多分辨率的方法,所以可以非常好地刻画信号的非平稳特征,如边缘、尖峰、断点等;(3)去相关性,因为小波变换可以对信号进行去相关,且噪声在变换后有白化趋势,所以小波域比时域更利于去噪;(4)选基灵活性,由于小波变换可以灵活选择变换基,从而对不同应用场合,对不同的研究对象,可以选用不同的小波母函数,以获得最佳的效果

1 小波去噪问题的描述

在数学上,小波去噪问题的本质是一个函数逼近问题,即如何在由小波母函数伸缩和平移版本所展成的函数空间中,根据提出的衡量准则,寻找对原信号的最佳逼近,以完成原信号和噪声信号的区分。这个问题可以表述为:

$$\begin{cases} \beta_{opt} = \arg \min_{\beta} \left(\| \beta(f) - f_s \| \right), \\ f_{opt} = \beta_{opt}(f) \text{ (opt 代表最优解)} \\ f(t) = f_s(t) + f_n(t), f_n \text{ 为噪声信号}, f_s \text{ 为原信号} \\ I = \{f \mid f \text{ 为实际信号}\}, W = span\{(\Psi_j)_{j=1}^J, \Phi\} \\ T = \{\beta \mid \beta \text{ 为 } I \text{ 到 } W \text{ 的函数空间映射}\} \end{cases}$$

由此可见,小波去噪方法也就是寻找从实际信号空间到小波函数空间的最佳映射,以便得到原信号的最佳恢复

从信号学的角度看,小波去噪是一个信号滤波的问题,而且尽管在很大程度上小波去噪可以看成是低通滤波,但是由于在去噪后,还能成功地保留图象特征,所以在这一点上又优于传统的低通滤波器。由此可见,小波去噪实际上是特征提取和低通滤波功能的综合,其流程框图如图1所示



图1 小波去噪的框图

在早期,人们通过对边缘进行某些处理,以缓解低通滤波产生的边缘模糊。在这一点上,虽然它们同小波去噪很相似,但是小波变换之所以能够很好地保留边缘,是因为小波变换的多分辨率特性。小波变换后,由于对应图象特征(边缘等)处的系数幅值较大^[20],而且在相邻尺度层间具有很强的相关性^[19,21],

所以便于特征提取和保护。相对早期的方法而言,小波去噪对边缘等特征的提取和保护是有很强的数学理论背景的,因而更利于系统的理论分析

2 小波去噪的发展历程

1992年,Donoho和Johnstone提出了小波阈值萎缩方法(WaveShrink)^[20],还给出了 $\delta = \sigma \sqrt{2 \ln(N)}$ 的阈值,并从渐进意义上证明了WaveShrink的最优性^[22];与此同时,Krim等人运用Rissanen的MDL(Minimum Description Length)准则,也得到了相同的阈值公式^[23];此后小波阈值萎缩方法被用到各种去噪应用中,并取得了很大的成功,对高斯噪声尤其如此。但是Donoho和Johnstone给出的通用阈值,由于有很严重的“过扼杀”小波系数的倾向,因此人们纷纷对阈值的选择进行了研究^[13,20,21,24~32],并提出了多种不同的阈值确定方法;后来,人们针对阈值函数的选取也进行了一些研究,并给出了不同的阈值函数^[11,28,33,34],但是当这些方法用到非高斯、有色噪声场合中,效果却不甚理想,其最主要的原因是这些方法都基于独立同分布噪声(i.i.d)的假设,并且这些方法大多是从Donoho和Johnstone给出的方法发展而来的,从而它们最后的去噪性能也依赖于用WaveShrink确定阈值时,对噪声服从独立正态分布的假设。对此,人们提出了具有尺度适应性的阈值选取法^[29,35],用来解决正态分布有色噪声的小波去噪问题,而另外一些学者则研究了在比白噪声更重尾的噪声情况下的小波去噪问题,并给出了显式的阈值公式^[33]。目前,基于阈值萎缩的小波去噪方法的研究仍然非常活跃,近来仍不断有新的方法出现,而且也可以看出,人们的研究方向已经转为如何最大限度地获得信号的先验信息^[19,23,36],并用这些信息来确定更合适的阈值或阈值向量,以达到更高的去噪效率。另外,除了阈值萎缩方法外,Kivanc,John和Xu等人还提出了不同的去噪方法^[21,37],例如利用Lipshitz指数的方法和基于最大后验概率MAP的比例萎缩法等,这些都丰富了小波去噪的内容

3 小波去噪方法的分类

小波去噪方法,大体可以分成小波萎缩法、投影方法、相关方法3类

3.1 小波萎缩法

小波萎缩法是目前研究最为广泛的方法,小波萎缩法又分成如下两类:第1类是阈值萎缩,由于阈值萎缩主要基于如下事实,即比较大的小波系数一般都是以实际信号为主,而比较小的系数则很大程度是噪声^[19]。因此可通过设定合适的阈值,首先将小于阈值的系数置零,而保留大于阈值的小波系数;然后经过阈值函数映射得到估计系数;最后对估计系数进行逆变换,就可以实现去噪和重建;而另外一种萎缩方法则不同,它是通过判断系数被噪声污染的程度,并为这种程度引入各种度量方法(例如概率和隶属度等),进而确定萎缩的比例,所以这种萎缩方法又被称为比例萎缩

3.1.1 阈值萎缩法

阈值萎缩方法中的两个基本要素是阈值和阈值函数

(1) 阈值的选择

阈值的确定在阈值萎缩中是最关键的。目前使用的阈值可以分成全局阈值和局部适应阈值两类。其中,全局阈值对各层所有的小波系数或同一层内的小波系数都是统一的;而局部适应阈值是根据当前系数周围的局部情况来确定阈值。目前提出的全局阈值主要有以下几种:

Donoho 和 Johnstone 统一阈值(简称DJ 阈值) $\delta = \sigma \sqrt{2 \ln N}$ 。其中, σ 为噪声标准方差, N 为信号的尺寸或长度

这是在正态高斯噪声模型下,针对多维独立正态变量联合分布,在维数趋向无穷时的研究得出的结论,即大于该阈值的系数含有噪声信号的概率趋于零^[20]。这个阈值由于同信号的尺寸对数的平方根成正比,所以当 N 较大时,阈值趋向于将所有小波系数置零,此时小波滤波器退化为低通滤波器

基于零均值正态分布的置信区间阈值 $\delta = 3\sigma \sim 4\sigma$

这个阈值是考虑零均值正态分布变量落在 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 之外的概率非常小,所以绝对值大于 3σ 的系数一般都被认为主要由信号系数构成

BayesShrink 阈值和 MapShrink 阈值

在小波系数服从广义高斯分布的假设下^[38], Chang 等人得出了阈值 $T_{\text{bayes}} = \sigma^2 / \sigma_\beta$ (σ 为噪声标准方差, σ_β 为广义高斯分布的标准方差值);而在小波系数服从 Laplace 分布的假设下^[39], Moulin 等人给出了基于 MAP 方法的阈值 $T_{\text{map}} = \lambda$ (λ 为 Laplace

分布的参数值)。

上述阈值最大的共同点,就是具有显式表达式
最小最大化阈值

这是 Donoho 和 Johnstone 在最小最大化意义下得出的阈值,与上边的阈值不同,它是依赖于信号的,而且没有显式表达式,在求取时,需要预先知道原信号。

理想阈值

理想阈值是在均方差准则下的最优阈值,同最大最小化阈值一样,也没有显式的表达式,并且这个阈值的计算通常也需先知道信号本身。但是由于实际求取时,这是不可能的,所以人们通过对这一准则的估计版本,求出使估计最小的阈值,并以此为理想阈值的估计。目前使用比较多的主要有如下两种方法:一是 SURE Shrink 阈值,它是在 SURE 准则下得到的阈值,该 SURE (Stein's Unbiased Risk Estimation) 准则是均方差准则的无偏估计,并且 SURE 阈值趋近于理想阈值;另外一个 GCV (Generalized Cross Validation) 准则, GCV 虽然是有偏的,但是由于用这种准则得到的最优阈值也趋近于理想阈值,而且不需要对噪声方差进行估计,所以许多文献都使用这种准则来确定合适的小波萎缩阈值^[26, 29, 40]。这两种阈值可以表示为:

GCV 阈值

$$T_{\text{GCV}} = \min(J), J = \frac{1}{N} (w - w_\delta)^2 \left/ \left(\frac{N_0}{N} \right)^2 \right.$$

其中, N 是某一系数层中,小波系数的个数, N_0 代表信号在阈值萎缩中被置为 0 的系数个数, w 和 w_δ 分别代表带噪小波系数和阈值萎缩后的系数

SURE 阈值

$$T_{\text{sure}} = \arg \min_{0 \leq T \leq T_{\text{univ}}} \left[\sigma^2 N + \sum_{j=0}^{N-1} \{w_j - t\}^2 - 2\sigma^2 \# \{ |w_j| \leq t \} \right]$$

其中, $\# \{ \}$ 代表取集合中元素的个数, σ^2 为噪声方差, w_j 为第 j 个小波系数, t 为两数取大

另外值得注意的是,当事先知道小波系数分布形式和参数时, Hansen 给出了理想阈值的一个隐式方程,利用该方程,通过数字计算方法可以很容易地确定这个理想阈值^[41]。

在上述这些阈值中,由于统一阈值计算简单,故得到很广泛的应用,但是其趋向于“过扼杀”小波系数,从而会导致较大重建误差;置信区间阈值虽跟图象(信号)尺寸无关,但由于随着图象尺寸增大,大的噪声系数出现的数目会增多,并被保留,因而导致误

差增大; 最小最大化阈值, 由于基于悲观决策的思想, 所以也会“过扼杀”系数; 理想阈值从理论上说, 是重建误差最小的阈值, 因而其估计版本 SUREShrink 阈值和 GCV 阈值往往能够获得较为满意的去噪效果; 实验表明, BayesShrink 阈值能够获得接近于理想阈值的去噪效果^[38]。另外, 人们有时往往根据待处理信号的一些先验知识, 结合经验, 给出不同的阈值^[12, 30, 42]。

与全局阈值不同, 局部阈值主要是通过考查在某一点或某一局部的特点, 再根据灵活的判定原则来判定系数是“主噪”, 还是“主信”, 以实现“去噪”和“保留信号”之间的平衡, 而且这些判定原则有时并不一定是从系数的绝对值来考虑的, 而是从别的方面, 例如从概率和模糊隶属度方面来考虑。Vidakovic 等人利用主信系数和主噪系数在跨尺度中分布的不同特征, 在 Bayes 框架下, 结合假设检验, 给出了一个阈值公式, 并以此来对小波系数进行硬阈值处理^[19]; 而 Ching 则结合区间估计理论和假设检验的方法给出了另外一种局部阈值萎缩方法^[11]; Chang 等人也给出了另一种局部阈值萎缩方法^[43]。实验结果表明, 局部阈值确实比全局阈值对信号的适应能力好, 但是需要较为繁琐的计算。

时至今日, 对阈值选择方法的研究仍在进行当中, 仍有新的阈值公式不断提出, 但通常阈值是根据实际应用的需要, 通过确定合适的准则, 并通过对可能的阈值进行寻优来选择。尽管均方误差函数(准则)是比较经常使用的准则, 它指出了重建信号同原信号在均方意义上的偏离程度, 但是由于在实际去噪时, 原信号是无法预知的, 所以人们就提出了许多方法来对均方误差进行估计, 这些方法主要有 OCV (Ordinary Cross Validation), GCV, SURE 以及 Krim 等人提出的有偏误差估计(HBRE)^[44], 其误差估计的对比见表 1。

表 1 4 种误差估计的比较

	OCV	GCV	SURE	HBRE
偏性	有偏	有偏	无偏	有偏
渐进	N , 偏差同交叉方式有关	N , 偏差 σ^2	无偏	N , 偏差与阈值有关
阈值偏性	渐进无偏	渐进无偏	无偏	有偏

在考虑重建信号与原信号误差的同时, 人们往往会根据信号的一些已知特征或要求重建信号应具备的特征来对去噪进行一定的限制, 以免出现病态问题。事实上, 虽然许多均方误差估计是渐进无偏

的, 但由于实际求取时, 仍有可能出现很大的估计偏差, 所以病态问题的出现是必须加以防范的。为此, 人们通常将偏差及限制的拉格朗日和作为新的准则来对阈值进行寻优, 例如 Donoho 和 Johnstone 所用的准则^[22]和 MDL 准则^[25]等。

(2) 阈值函数

在阈值萎缩中, 阈值函数体现了对几种系数的不同处理策略, 以及不同的估计方法。阈值函数主要可以分为如下 3 种, 一为硬阈值函数; 二为软阈值函数; 三为半软阈值函数。其中, 硬阈值函数为 $\delta(w) = w I(|w| > T)$, 而软阈值函数为 $\delta(w) = (w - \text{sgn}(w)T) I(|w| > T)$, 其中, I 为示性函数。

Bruce 和 Gao 在高斯噪声条件下, 得出了软阈值和硬阈值萎缩方法的偏差、方差以及 L_2 风险公式, 通过对这些公式的分析, 得出了如下结论^[44]:

给定阈值 T , 软阈值总比硬阈值萎缩造成的方差小;

当系数充分大时, 软阈值比硬阈值方法造成的偏差大; 当系数真值在 T 附近时, 硬阈值方法有最大的方差、偏差以及 L_2 风险, 而软阈值方法则在系数真值较大时才有较大的方差、 L_2 风险及偏差; 两种方法在系数真值较小时, L_2 风险都很小。

总的来说, 硬阈值方法可以很好保留图象边缘等局部特征, 但图象会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真, 而软阈值方法处理结果则相对平滑得多, 但是软阈值方法可能会造成边缘模糊等失真现象。针对这一点, Bruce 和 Gao 提出了一种半软阈值函数^[34, 45]:

$$\delta(w) = \text{sgn}(w) \frac{T_2(|w| - T_1)}{T_2 - T_1} I(T_1 < |w| < T_2) + w I(|w| > T_2)$$

该方法通过选择合适的阈值 T_1 和 T_2 , 可以在软阈值方法和硬阈值方法之间达到很好的折中。另外, Zhang 等人为了对 SURE 误差准则函数进行基于梯度的优化搜索, 提出了另外一种阈值函数^[46, 28, 47], 这种阈值函数同上边 3 种阈值函数所不同的是, 它拥有更高的导数阶, 故其重建图象更为平滑, 但该文作者将去噪效果的提高归功于搜索方法, 其实, Donoho 和 Johnstone 提出的在当前小波系数集合中, 搜索最优阈值的方法, 对于当前信号已经是最优的了, 由此可见, 该文去噪效果的提高则应归功于阈值函数的选取, 实际上, 此时阈值萎缩已经转化成了比例萎缩。

3.1.2 比例萎缩

相对阈值萎缩方法来说, 比例萎缩有更大的灵



活性,从某种意义上说,可以认为阈值萎缩是比例萎缩的一种特例(比例为0和1,或者 $1 - T/|w|$)。比例萎缩的特点主要在于它具有对信号的某一局部的适应能力。Shark等人针对小波阈值萎缩中,统一阈值倾向于“过扼杀”,而SURE阈值倾向于“过保留”小波系数的特点,给出了一个隶属度函数,然后将两个阈值之间的系数,按照隶属度进行萎缩,并得到了非常好的效果^[24];而Malfait等人则通过将图象一般不存在孤立边缘点的先验知识与小波图象Holder指数相结合,利用Bayes估计理论给出了小波系数“主信”的概率,并以此来进行比例萎缩,从而大大消除了由噪声引起的伪边缘^[36]。在运用比例萎缩方法的文献中,有许多都是基于MMSE (Minimum Mean Square Error)估计(在噪声为高斯分布时,萎缩比例为信号系数方差同系数方差之比),例如,Mihcak等人受到EQ (Expectation Quantization)编码方法的启发,将无噪信号经过变换所得到的的小波系数视为方差与周围小波系数高度相关的、独立的零均值高斯分布,并结合小波系数方差的先验模型,从中得到了信号小波系数方差的估计,然后由小波系数方差和噪声方差,再根据MMSE准则得到小波系数萎缩的比例^[48];而Badulescu等人则通过将MMSE估计和中值滤波相结合,解决了利用小波在混合噪声情况下的去噪问题^[34]。

3.2 投影方法

投影方法的原理就在于将带噪信号以一种迭代的方式,投影到逐步缩小的空间,由于最后的空间能更好地体现原信号的特点,所以投影法也能够有效地区分噪声和信号。投影方法有Matching Pursuits法和MCD (Multiple Compact Domain)或POCS (Projection Onto Convex Set)法两类。其中,Matching Pursuits法是通过指定一族小波或波函数,并将带噪信号向此函数族进行投影,接着又对残差投影,并循环反复,直到残差最后达到一定的条件;Matching Pursuits法是Mallat等人首次提出的,他们用Gabor函数库张成投影空间,并用以去噪,值得注意的是,Matching Pursuits法除了小波函数库可以选择之外,还可以使用局部余弦等多种函数库^[49]。Krishnan等人在进行膝盖接合图的去噪时,对小波变换、小波包变换和Matching Pursuits法进行了比较,发现Matching Pursuits法比较适合这类图象的去噪,并由此得到了较为令人满意的效

果^[16],而MCD和POCS法同Matching Pursuits法很相似,也是基于投影原理,只不过信号的投影空间有所不同(如果利用小波,则一般为Besov空间的凸集)。Demoment指出,POCS法可以用来解决函数空间为凸集的逆问题^[50],而Prakash和Moulin以带噪信号的硬阈值萎缩版本为迭代起点,并利用POCS法来求解由信号的两个小波变换版本所规定凸集的交集,最后完成去噪^[51],类似的研究还有Choi等人的研究^[52]。需要指出的是,POCS法并不局限于小波函数展成的空间^[53~56]。

3.3 相关方法

相关方法主要是基于信号在各层相应位置上的小波系数之间往往具有很强的相关性,而噪声的小波系数则具有弱相关或不相关的特点来进行去噪的,如Xu等人提出了一种SSNF (Spatially Selective Noise Filtration)方法,该方法是利用相邻尺度小波系数的相关程度来进行去噪,即通过将相邻尺度同一位置系数的相关量来构成相关量图象,在作适当的灰度伸缩后,再同原来的小波图象进行比较,其中较大的相关量被视为对应于边缘等的图象特征,而被抽取出来,并作为原信号小波变换的估计,然后经反变换就得到去噪版本^[37]。因为SSNF是一个迭代方法,迭代的终止规则是看剩余系数的能量是否接近于噪声的能量,所以噪声方差的估计在这个方法中显得非常重要。在这方面,Pan Quan等人做了一些改进^[21,57]。此外,John等人则将矢量编码和Bayes估计结合起来,利用全局非空间适应Bayes估计得到带噪声信号的粗糙去噪版本,然后利用矢量编码来获得更精细的信号估计^[58]。

4 小波去噪中的小波系数模型

在小波去噪中,小波系数模型非常重要,只有在成功的小波系数模型上,才可能提出成功的小波去噪方案。小波系数模型,主要分为层间模型、层内模型和混合模型。其中,层间模型主要是考虑跨尺度系数之间关系的模型;层内模型主要考虑层内系数的统计分布,以及相邻系数之间的关系,而混合模型是综合考虑了层间和层内小波系数关系的模型。

4.1 层内模型

目前最经常使用的层内系数模型是广义高斯分布模型,这是对自然图象在同一层内的小波系数分布进行统计得到的规律,Laplace分布和高斯分布是

它的两个特例 Hansen 等人利用与自然信号对应的小波系数近似地服从 Laplace 分布的特点, 在小波系数是独立同分布的假设下, 得到了利用带噪声信号小波系数来估计原信号的公式, 并用于去噪, 收到了非常好的效果^[41]。稍为复杂些的模型, 则将信号小波系数看成是独立, 但非同分布的。事实上, 由于小波变换的去相关作用, 相邻小波系数之间并无明显的关系, 但是小波系数的绝对值或平方值却是符合 Markov 场的分布 Mihcak 等人由此提出小波系数的层内混合模型, 在此模型中, 原信号小波系数被看作是一个双随机过程, 其方差局部高度相关, 但在给定方差时, 则成为相互独立且均值为零的高斯分布^[48, 59]; 而 Chang 等人则打破空间位置的限制, 从小波系数邻域来考察方差的相关性, 从而得到了具有很强局部适应性的阈值萎缩方法^[43]。

4.2 层间模型

层间模型描述的是跨尺度小波系数之间的关系, 较早但相对粗糙的模型是由 Shapiro 提出, 以这种模型为基础的零树编码方法已经在图象编码中得到了广泛的应用, 这种模型的主要特点是认定, 低尺度中, 较小的小波系数, 其子孙很有可能也较小; 而 Baraniuk 等人则通过隐式马氏链的转移矩阵将这种关系量化起来^[60]。在小波去噪中, 这个特征可以用来区分图象边缘和由噪声引起的伪边缘^[19]。

4.3 混合模型

混合模型主要综合了上述两种模型, 它既考虑了层间系数之间的相关性, 又顾及了层内系数的关系, 由于小波系数层实际上对应一个尺度, 所以这种模型也被称为空间-尺度混合模型 Liu 等人通过规定一个阈值 T , 并将大于 T 的系数称为重要 (Significant) 的, 由此根据其父亲是否重要将小波系数分成 G_{sig} 和 G_{insig} 两类, 并假定 G_{sig} 服从指数分布, G_{insig} 则服从方差局部高度相关的高斯分布^[61], 最后得到新的混合模型。其与隐式马氏树 (HMT, Hidden Markov Tree) 模型相比, 新模型考虑了层内系数之间的关系; 而与层内模型^[48, 59, 43]相比, 则能更好揭示图象特征在跨尺度下的行为。

另外, Baraniuk 等人将小波系数分成几种状态 (如小和大), 并通过考察小波系数状态在层内和层间的变化, 提出了独立状态模型 (M, Independent Model)、隐马氏链模型 (HMC, Hidden Markov Chain) 和隐马氏树模型 (HMT) 3 种模型, 并统称为小波马尔可夫模型^[60]。前两者实际上属于层内模

型, 而后一种则属于层间模型。

5 各种小波变换在小波去噪中的应用

小波变换包括单小波变换、小波包变换、多小波变换、平移不变 (TI, Translation Invariant) 单小波变换、平移不变小波包变换和平移不变多小波变换等。一般来说, 小波变换能够很好表征一大类信号, 但是当信号的高频信息 (细小边缘或纹理) 较多时, 小波变换的倍频特征将使得高频部分不能得到很好的分解和表示, 而小波包变换则能对高频部分进行任意细的分割, 由于这样可以更好地刻画这一类信号, 因而对这类图象或信号, 小波包变换要比小波变换好, 但是当信噪比较低时, 小波包变换在搜索小波基时, 会受到噪声信号的影响, 即在噪声主宰区域, 小波包算法由于会去更好地匹配噪声, 从而导致小波基的搜索, 在一定程度上只是为了描述噪声信号, 反而不利于小波去噪。小波阈值去噪法, 虽然表现了非常好的噪声和信号区分能力, 但是由于缺乏平移不变性, 因此使得最后得到的去噪版本出现失真, 主要体现为振铃效应和伪 Gibbs 效应。为此, Donoho 和 Coifman 通过一种循环平移 (Cycle-Spinning) 的方法, 提出了平移不变小波变换^[62], 很好地解决了这个问题, 从而使得 TI 小波去噪方法得到了很多应用^[21, 36, 58]。另外, 使用 TI 小波变换还有一个优点, 就是小波系数的个数不会随着层数衰减, 从而能够保持某些去噪方法的渐进特性, 例如用 GCV 准则确定的阈值不会过度偏离理想阈值^[29]。Cohen 等人结合小波包和平移不变小波的特点, 提出了一种利用平移不变小波包去噪的方法, 并给出了相应的阈值公式^[25]。因为小波变换和小波包变换均是基于同一个母小波, 所以在表征多种特征的图象时, 有时效率并不是很高, 而在这一点上, 多小波通过几个母小波之间的互补, 则可以更好地胜任这一工作, 从而可避免一些特征模糊化的现象, 实验效果也很好地体现了这一点^[63, 64], 而 Tien 等人则更进一步, 利用平移不变多小波变换来进行去噪^[27]。因为平移不变小波变换实际上是一种冗余的分解方式, 所以计算量不可避免要比小波变换大得多, 针对这一点, Paul 等人做了有益的尝试, 构造出了接近于平移不变的小波变换^[65]。从算法的简繁程度和最后的去噪效果综合考虑, 上述任何一种方法都不绝对具有优势, 而带噪声信号的具体特征才是使用何种变换的决定因素。

6 小波去噪同图象压缩的关系

从某种意义上说,小波去噪是一种在分析层次上的图象压缩^[41],只不过小波去噪更多考虑的是,在保留信号主要特征的基础上,如何滤除噪声,而图象压缩考虑的是如何在追求更高压缩比时,减少量化噪声,由于两者效率的提高,都有赖于对信号小波系数的正确建模,因此两者有许多共通之处,而如今已有许多小波去噪方法是从小波编码方法中得到启发的,例如EQ编码^[48],上下文模型^[43]和零树编码^[61]等。另外一些学者则通过引入信息论中的MDL准则,将去噪、压缩两者的目标结合起来^[25,33],其中,以Hansen等人的研究成果^[41]尤其吸引人,该方法既大幅度地压缩了信号,又具有很好的去噪效果。

7 不同噪声场合中的小波去噪

总的来说,小波去噪在噪声为高斯分布时,收到了很好的效果,但是对其他噪声分布时(如混合噪声、重尾噪声)的研究不是很多,究其原因,其一是由于日常出现的噪声一般都服从或近似于服从高斯分布,再者是因为非高斯分布噪声往往都有比较复杂的模型,因此用现有的数学工具很难得到理论性的结果。虽然如此,许多学者还是做了一些有益的尝试,如Badulescu等人将小波阈值萎缩法同小波比例萎缩以及中值滤波结合起来,对带有混合噪声的信号进行去噪^[34],而Krim等人则考虑在重尾噪声族中通过选择一种使得分布熵最大化的重尾噪声——Huber分布,并结合MDL准则给出了阈值公式^[33],新阈值同DJ阈值相比,具有更强的鲁棒性。

从某种意义上来说,去噪成功与否,有时要受制于信号和噪声的相似程度,如果信号具有同某种噪声极为相似的特征,那么小波变换将无法或很难区分信号空间和噪声空间,而且对这种噪声的去噪效果也不会很好。

8 小波去噪的展望

尽管小波去噪方法现在已经成为去噪和图象恢复的重大分支和主要研究方向,但是在另类噪声分布(非高斯分布)下的去噪研究还不够,目前国际上

开始将注意力投向这一领域,其中,非高斯噪声的分布模型、高斯假设下的小波去噪方法在非高斯噪声下如何进行相应的拓展,是主要的研究方向,未来这一领域的成果将大大丰富小波去噪的内容。

从层内模型到层间模型,甚至混合模型,小波系数模型的精细带来了去噪效果的改善,可以说,小波去噪的成功与否,就在于人们得到先验知识的能力和利用这些知识进行准确建模的能力,所以未来小波去噪方法的进一步发展,还有赖于新的更为准确的模型提出。

另外,从数学本质上讲,由于小波去噪方法也是一个模型定阶的问题,所以模型定阶问题的任何进展也将会推动小波去噪方法向前发展,这个问题的研究方向有MDL准则、MML(Minimum Message Length)准则以及Bayes方法等,不过Paul等人指出了在一定条件下,这几种准则或方法都选取同样的模型^[66],所以人们可以选择在难度相对较小的准则下,对这一问题进行研究。

另外,目前小波去噪方法所取得的成功不仅将大大拓宽小波去噪方法的应用领域,而且在推动这些领域研究发展的同时,必将从这些领域的应用中反馈新的问题,从而会进一步丰富小波去噪的内容和推动小波去噪的发展。

参 考 文 献

- 1 Pitas I, Venetsanopoulos A N. Nonlinear digital filters: Principles and applications [M]. Boston: Kluwer Academic, 1990.
- 2 Astola J. Fundamentals of nonlinear digital filtering [M]. Boca Raton, U. S. A.: CRC Press, 1997.
- 3 Wtukey J. Exploratory data analysis [M]. New York: Addison Wesley, 1977.
- 4 Justusson B I. Median filtering: Statistical properties [A]. In: Huang H S ed. Two-dimensional digital signal processing, Topics in Applied Physics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981: 161~196.
- 5 Bovik A C, Huang T S, Munson D C. Generalization of median filtering using linear combinations of order statistics [J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1983, 31(6): 1342~1350.
- 6 Coyle E J, Lin J H, Gabbouj M. Optimal stack filtering and the estimation and structural approaches to image processing [J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(12): 2037~2066.
- 7 Geman D, Reynolds G. Constrained restoration and the recovery of discontinuities [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(3): 367~383.
- 8 Wong E Q, Alagazi V R. Image enhancement using linear

- diffusion and an improved gradient map estimate [A]. In: Proceedings of 1999 IEEE International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 154~ 158
- 9 You Yuli, Kaveh D. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(10): 1723~ 1730
- 10 Bouman C, Sauer K. A generalized Gaussian image model of edge preserving map estimation [J]. IEEE Trans Image Processing, 1993, 2(3): 296~ 310
- 11 Ching P C, So H C, Wu S Q. On wavelet denoising and its applications to time delay estimation [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(10): 2879~ 2882
- 12 Deng Liping, Harris J G. Wavelet denoising of chirp-like signals in the Fourier domain [A]. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. Orlando USA, 1999: III-540-III-543
- 13 Gunawan D. Denoising images using wavelet transform [A]. In: Proceedings of the IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing[C]. Victoria BC, USA, 1999: 83~ 85
- 14 Baraniuk R G. Wavelet soft-thresholding of time-frequency representations [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Texas USA, 1994: 71~ 74
- 15 Lun D P K, Hsung T C. Image denoising using wavelet transform modulus sum [A]. In: Proceedings of the 4th International Conference on Signal Processing [C]. Beijing China, 1998: 1113~ 1116
- 16 Hsung T C, Chan T C L, Lun D P K *et al*. Embedded singularity detection zerotree wavelet coding[A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 274~ 278
- 17 Krishnan S, Rangayyan R M. Denoising knee joint vibration signals using adaptive time-frequency representations[A]. In: Proceedings of IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 'Engineering Solutions for the Next Millennium[C]. Alberta Canada, 1999: 1495~ 1500
- 18 Liu Bin, Wang Yuanyuan, Wang Weiqi. Spectrogram enhancement algorithm: A soft thresholding-based approach[J]. Ultrasound in Medical and Biology, 1999, 25(5): 839~ 846
- 19 Vidakovic B, Lozoya C B. On time-dependent wavelet denoising [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(9): 2549~ 2551
- 20 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81: 425~ 455
- 21 Pan Quan, Zhang Pan, Dai Guanzhong *et al*. Two denoising methods by wavelet transform [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(12): 3401~ 3406
- 22 Donoho D L, Johnstone I M, Kerkycharian G *et al*. Wavelet shrinkage: asymptopia? [J]. Journal of royal statistics society (B), 1995, 57: 301~ 369
- 23 Krim H, Pesquet J C. On the statistics of best bases criteria [A]. In: Antoniadis A, Oppenheim G *et al*. Wavelets in statistics of Lecture Notes in Statistics [C]. New York: Springer-Verlag, 1995: 193~ 207.
- 24 Shark L K, Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain[J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 581~ 582
- 25 Israel Cohen, Shalom Raz, David Malah. Translation-invariant denoising using the minimum description length criterion [J]. Signal Processing, 1999, 75(3): 201~ 223
- 26 Weyrich N, Warhola G T. Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising [J]. IEEE Trans Image Processing, 1998, 7(1): 82~ 90
- 27 Bui T D, Chen G. Translation-invariant denoising using multiwavelets [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(12): 3414~ 3420
- 28 Zhang Xiao Ping, Desai M D. Adaptive denoising based on SURE risk [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(10): 265~ 267.
- 29 Jansen M, Bultheel A. Multiple wavelet threshold estimation by generalized cross validation for images with correlated noise [J]. IEEE Trans Image Processing, 1999, 8(7): 947~ 953
- 30 Han K J, Tewfik A H. Hybrid wavelet transform filter for image recovery [A]. In: Proceedings of the International Conference on Image Processing[C]. Chicago USA, 1998: 540~ 544
- 31 Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution [J]. Annals of Statistics, 1981, 9: 1135~ 1151
- 32 Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. JASA, 1995, 90: 1200~ 1223
- 33 Krim H, Schick I C. Minimax description length for signal denoising and optimized representation [J]. IEEE Trans Information Theory, 1999, 45(3): 898~ 908
- 34 Badulescu P, Zaciuc R. Removal of mixed-noise using order statistic filter and wavelet domain Wiener filter [A]. In: Proceedings of the International Semiconductor Conference[C]. Sinaia Romania, 1999: 301~ 304
- 35 Johnstone I M, Silverman B-W. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise [J]. Journal of royal statistics society series(B), 1997, 59: 319~ 351
- 36 Malfait M, Roose D. Wavelet-based image denoising using a Markov random field a priori model [J]. IEEE Trans Image Processing, 1997, 6(4): 549~ 565
- 37 Xu Yansun, Weaver J B, Healy M J *et al*. Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique [J]. IEEE Trans Image Processing, 1994, 3(6): 743~ 758
- 38 Chang S G, Yu Bin, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(9): 1532~ 1546
- 39 Moulin P, Liu Juan. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized-Gaussian and complexity priors [J]. IEEE Trans Information Theory, 1999, 45: 909~ 919
- 40 Jansen M, Malfait M, Bultheel A. Generalized cross validation for wavelet thresholding [J]. Signal Processing, 1997, 56(1): 33~ 44
- 41 Hansen M, Yu Bin. Wavelet thresholding via MDL for Natural Images [J]. IEEE Trans Information Theory, 2000, 46(5): 1778~ 1788
- 42 Maneesh S, Prakash I, Krishna R *et al*. Segmentation based denoising using multiple compaction domains [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 372~ 375
- 43 Chang S G, Yu Bin, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet

- thresholding with context modeling for image denoising [J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(9): 1522~ 1530
- 44 Krim H, Tucker D, Mallat S G *et al*. On denoising and best signal representation [J]. IEEE Trans Information Theory, 1999, 5(7): 2225~ 2238
- 45 Bruce A G, Gao Hong Ye. Understanding waveshrink: variance and bias estimation [EB/OL]. <http://www.mathsoft.com/wavelets.html>
- 46 Zhang Xiao Ping, Luo Zhiquan. New time-scale adaptive denoising method based on wavelet shrinkage [A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. Phoenix U SA, 1999: 1629~ 1632
- 47 Zhang Xiao Ping, Desai M D. Nonlinear adaptive noise suppression based on wavelet transform [A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing[C]. Seattle U SA, 1998: 1589~ 1592
- 48 Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K *et al*. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(12): 300~ 303
- 49 Mallat S G, Zhang Z F. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 41(12): 3397~ 3415
- 50 Demoment G. Image reconstruction and restoration: overview of common estimation structures and problems[J]. IEEE Trans Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(12): 2024~ 2036
- 51 Prakash I, Moulin P. Multiple-domain image modeling and restoration [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 362~ 366
- 52 Choi H, Baraniuk R G. Multiple basis wavelet denoising using besov projections [A]. In: Proceedings of International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 595~ 599
- 53 Sezan M I, Stark H. Image restoration by the method of convex projection[J]. IEEE Trans Medical Imaging, 1982, M F1(2): 95~ 101
- 54 Sezan M I, Stark H. Tomographic image reconstruction from incomplete view data by convex projection and direct fourier inversion[J]. IEEE Trans Medical Imaging, 1984, M F3(2): 91~ 98
- 55 Tekalp A M, Trussell H J. Comparative study of some recent statistical and set-theoretic methods for image restoration [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, speech, signal processing [C]. New York USA, 1988: 988~ 991
- 56 Youla D C, Webb H. Image restoration by the method of convex projections Part I-theory [J]. IEEE Trans Medical Imaging, 1982, M F1(2): 81~ 94
- 57 Pan Quan, Zhang Lei, Zhang Hongcai *et al*. Adaptive wavelet based spatially de-noising [J]. In: Proceedings of the 4th International Conference on Signal Processing Proceedings[C]. Beijing China, 1998: 486~ 489
- 58 John M, Sundaresan S N, Ramakrishna P V. Wavelet based image denoising: VQ-Bayesian technique[J]. Electronics Letter, 1999, 35(19): 1625~ 1626
- 59 Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K. Spatially adaptive statistical modeling of wavelet image coefficients and its application to denoising [A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. Phoenix, U SA, 1999: 3253~ 3256
- 60 Crouse M S, Baraniuk R G, Nowak R D. Signal estimation using wavelet-Markov models[A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. Munich Germany, 1997: 3429~ 3432
- 61 Liu Juan, Moulin P. Image denoising based on scale-space mixture modeling of wavelet coefficients[A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Kobe Japan, 1999: 386~ 390
- 62 Coifman R R, Donoho D L. Translation invariant de-noising [A]. In: Wavelets in Statistics of Lecture Notes in statistics 103 [C]. New York: Springer-Verlag, 1994: 125~ 150
- 63 Ghael S P, Sayeed A M, Baraniuk R G. Improved wavelet denoising via empirical wiener filtering[A]. In: Proceedings of SPIE[C]. San Diego U SA, 1997: 389~ 399
- 64 Downie T R, Silveanu B W. The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(9): 2558~ 2561
- 65 Hui Y, Kok C W, Nguyen T Q. Wavelet shrinkage denoising using paraunitary shift-invariant filter banks [A]. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. Hong Kong China, 1997: 185~ 188
- 66 Paul M B, Vitanyi, Li Ming. Minimum description length induction, bayesianism, and kolmogorov complexity[J]. IEEE Trans Information theory, 2000, 46(2): 446~ 464



谢杰成 1975年生,博士生 主要从事小波图象处理、模式识别的研究



张大力 1946年生,副教授 主要从事图象处理、模式识别、图象融合等领域的研究

徐文立 1947年生,教授,博士生导师 主要从事机器视觉、变频调速、模糊控制等领域的研究