小波理论发展及其应用（综述）

李 建 华[1] 李 万 社[2]

（1. 河西学院数学系，甘肃 张掖 734000；2. 陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西 西安 710062）

摘 要：小波分析是傅立叶分析的继承和发展，它具有广泛的应用价值．文章介绍了小波分析产生的背景，发展历程及其在应用领域的现状，并从几个方面概述了它比较成功的应用，最后展望了该理论进一步的发展趋势.

关键词：小波变换；Gabor 变换；傅立叶变换；信号消噪；数据压缩

中图分类号：O174.83 **文献标识码**：A **文章编号**：1672 － 0520（2006）02 － 0027 － 05

1 引言

小波分析（wavelet）是在应用数学的基础上发展起来的一门新兴学科，近十几年来得到了飞速的发展．作为一种新的时频分析工具的小波分析，目前已成为国际上极为活跃的研究领域．从纯粹数学的角度看，小波分析是调和分析这一数学领域半个世纪以来工作的结晶；从应用科学和技术科学的角度来看，小波分析又是计算机应用，信号处理，图形分析，非线性科学和工程技术近些年来在方法上的重大突破．由于小波分析的“自适应性”和“数学显微镜”的美誉，使它与我们观察和分析问题的思路十分接近，因而被广泛应用于基础科学，应用科学，尤其是信息科学，信号分析的方方面面．本文将介绍小波分析理论的发展历程，产生背景及其在一些方面的应用现状，并从几个方面概述了它比较成功的应用实例，最后展望了小波分析研究的发展趋势.

2 小波分析的产生及其发展历程

从小波变换的发展过程来说，大致可分成三个阶段[1]：

第一阶段：小波分析思想的萌芽及孤立应用时期，主要特征是一些特殊构造的小波在某些科学研究领域的特定问题上的应用．其思想起源可以追溯到本世纪初，1910 年*Alfred Haar*利用伸缩平移思想构造了第一个规范正交小波基，即*Haar*系．1938 年，*Little wood-Paley*提出了按二进制频率成分分组的理论，这便成为多尺度分析的思想雏形[2]．70 年代是小波分析发展的关键时期，*Calderon*表示定理和*Hardy*空间的原子分解及无条件基的大量研究为小波分析的诞生提供了理论上的准备．这个时期最具代表性的工作是，法国地球物理学家*J.Morlet*和*A.Grossman*第一次把“小波”用来分析地震数据，并提出了小波分析的概念．计算机视觉专家*D.Marr*在他的“零交差”理论中使用了可按“尺度大小”变化的滤波器算子及现在称为“墨西哥帽”的小波也是这一时期有名的工作之一．当时不同领域的专家，学者，工程师独立地构造自己需要的小波，但他们的研究领域却广泛分布于科学技术研究的许多方面，这也预示了小波分析理论研究和应用热潮的到来.

第二阶段：国际性研究热潮和统一构造时期．真正的小波热潮开始于 1986 年，*Y.Meyer*在怀疑小波基的存在性时成功地构造了第一个真正的小波基[3]．之后，*P.Lemarie*和*G.Battle*也分别独立地构造具有指数衰减的光滑小波，其伸缩平移产生的函数系构成$L^2(R)$ 的标准正交基．再后来，*S.Mallat*和*Y.Meyer*提出了多分辨分析（*MRA*）理论[4]，统一了在此之前提出的各种具体的小波构造方法．同时，*S.Mallat*还在多分辨分析的基础上，给出了离散小波的数值算法，即*Mallat*塔式算法[5]. 值得一提的是*Daubechies*从离散滤波器迭代方法出发构造出具有有限支撑的正交小波基和对称的双正交小波，为以后正交小波的构造设定了框架[6]．*C.K.chui*和王建忠基于样条函数构造出单正交小波函数，并讨论了具有良好局部化性质的尺度函数和小波函数的构造方法[7]．1992 年 3 月国际性综合杂志*IEEE*信息论汇刊发表小波分析及其应用专刊，较全面展现了当时小波分析理论和应用的发展情况.

收稿日期：2005-05-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目（编号：60272058）.

作者简介：李建华（1973 —），女，四川重庆人，河西学院数学系讲师，陕西师范大学数学与信息科学学院在读研究生，研究方向：智能信号处理.

第三阶段：全面应用时期．从 1992 年开始，小波分析方法进入全面应用阶段．1993 年，一份专门刊载小波理论和应用发展的国际刊物“*Applied and Computational Harmonic Analysis*”在美国正式创刊，标志着小波分析理论研究进入到新的阶段．在前一阶段的基础上，尤其是*S.Mallat*塔式算法的简便可行，使小波分析迅速波及科学研究和工程技术应用的几乎所有领域．时至今日，小波分析的应用范围还在不断扩大，许多科技期刊都刊载与小波分析相关的论文，各个学科领域的地区性和国际性学术会议和国际会议都有涉及小波分析的各种类型的论文、报告．

纵观小波的发展历史，其理论和应用研究的发展是交织在一起相互促进的．1991 年出现了多小波理论，1994 年，*G. Strang*和*V.Strela*等人基于 n 重多分辨分析，建立了多小波的基本理论框架[8]，掀起了小波分析理论研究的新热潮．小波分析理论的另一个重要进展是*V.Wickerhauser*和*R.Coifman*的小波包概念[9]，提出了一种更精细的分解方法．1993 年又提出了算法简单且具有良好的相位定位能力的谐波小波．*Sweldens*在 1995 年系统地提出通过矩阵的提升格式来研究完全重构滤波器，从而建立了称之为第二带小波变换的框架体系[10].*Donoho*等人在 1999 年也提出了脊波（*ridgelet*）与曲波（*curvelet*）理论．目前，这些理论也已经成功地应用于数学及信息处理的各个领域．

一个不容忽视的方面是小波分析在理论数学领域也取得了巨大的进展．近十几年来，由于算子代数理论和空间理论的许多有用工具被应用于小波理论，特别是小波分析中的框架，从而获得许多重要结论[11]，也使得小波理论研究更上了一个层次．

3　小波理论产生的背景

自 1882 年*Fourier*发表热传导解析理论以来，经过一个多世纪的不断完善和发展，以傅立叶级数和傅立叶积分理论为主要内容的调和分析已在数学，物理学以及工程实际中得到了广泛应用．

若 $f(t)\in L^2(R)$，则有：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}dw \tag{1}$$

其中：

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt \tag{2}$$

称为 $f(t)$ 的傅立叶变换（*FT*）．

傅立叶分析就是通过 $\hat{f}(w)$ 完全刻画 $f(t)$ 的性质．Fourier 分析是一种频谱分析，它能揭示信号 $f(t)$ 的频谱结构，且 Fourier 级数在计算方面也有特别的吸引力．

为了在数值上实现 FT，1965 年美国工程师提出了计算量为 $O(N\lg N)$ 的快速 Fourier 变换（FFT）．正是有了 FFT，Fourier 分析才真正成为人们认识自然改造自然的流行工具．但事实上，Fourier 变换也存在着不可避免的缺陷：

（a）Fourier 分析擅长处理线性问题，对非线性问题无能为力．

（b）FT 不具备时频同时局部化的特性．由（2）式可知：要想获得信号 $f(t)$ 的频率特征，必须确切知道 $f(t)$ 在整个时域上的信息，且（2）式没有反映出随时间变化的频率．而我们关心的是信号在任意短暂时间间隔内的频率变化情况，如：地震信号处理中关心的是什么位置出现什么样的反射波．

（c）在 L^2 以外空间，变换系数不能刻画出 $f(t)$ 所在的空间．

在充分剖析 FT 的不足之后，1946 年，Gabor 提出了加窗 Fourier 变换（WFT），即 Gabor 变换：设 $f(t)\in L^2(R)$，则 $f(t)$ 的 Gabor 变换定义为：

$$G(w,\tau)=\langle f(t),g(t-\tau)e^{iwt}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t-\tau)e^{-iwt}dt \tag{3}$$

式中 $g(t)$ 称为窗函数．G（w,τ）反映 $f(t)$ 在 $t=\tau$ 附近的频谱特征，而且窗口位置随参数 τ 而变（平移），可达到对研究信号不同位置局部性的要求，在一定程度上弥补了 Fourier 变换的缺陷．但是，由于 Gabor 变换的时—频窗的大小固定，且无法满足正交性，而在实际中我们要求高频信号的分辨率要比低频信号的高，因此，Gabor 变换不能敏感反映信号的突变．小波分析正是为了克服 Fourier 变换，Gabor 变换的这些不足而提出来的．

若函数 $\psi(t)\in L^2(R)$ 满足容许性条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)dt=0$，则称 $\psi(t)$ 为一个母小波．我们把由 $\psi(t)$ 伸缩平移得到的一组函数：$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. $a,b\in R,a\neq 0$ 称为小波函数．

设信号 $f(t)\in L^2(R)$，其连续小波变换（*CWT*）定义为：

$$W_f(a,b)==\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt. \tag{4}$$

当 $\psi(t)$ 满足：$C_\psi=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|}dw<+\infty$ 时，则对任意 $f(t)\in L^2(R)$ 均能重构，即：

$$f(t)=C_\psi^{-1}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{W_f(a,b)\overline{\psi_{a,b}(t)}}{a^2}dadb. \tag{5}$$

因为 *CWT* 的冗余性较大及数值实现的需要，我们常采用离散形式．对某一确定的尺度因子 $a_0>1$，$b_0>0$，我们选择：$a=a_0^m,b=nb_0a_0^m,m,n\in Z$.相应的离散小波为：$\psi_{m,n}=a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x-nb_0)$ 对 ψ 和 a_0,b_0 作某些特殊的选择，则 $\psi_{m,n}$ 可以构成 $L^2(R)$ 的标准正交基．

所谓小波就是小的波形，“小”即具有衰减性，“波”是指具有波动性．小波分析优于 Fourier 分析在于：

（a）在时域频域同时具有良好的局部特性：

在低频具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率，而在高频正好与之相反，使小波具有对信号的“自适应”能力．这正好符合低频信号变化缓慢而高频信号变化迅速的特点，特别适合处理瞬变信号．小波能对高频采用逐渐精细的时域取样步长，从而可以聚集到对象的任意细节，被誉为[12]“数学显微镜”．

（b）基的多样性：

小波分析与 Fourier 分析的实质都是将信号 $f(t)$ 投影在一组标准正交基上，所不同的是 Fourier 分析对不同 $f(t)$ 只用唯一的基 $\{\exp(iwx)|w\in R\}$；而小波基的家族是庞大的，同一 $f(t)$ 可投影在不同小波基上．事实上，我们在用“巨大的小波基库”来描述 $f(t)$．因为不同的小波基适合于分析不同的信号，从而在不同实际应用场合，一个重要的问题是如何选择适合具体信号 $f(t)$ 的小波基，以利于信号特征的提取，或利于信号处理任务的实现．

在实际应用中，为了实现小波变换，常采用 Mallat 基于多分辨分析提出的 Mallat 塔式算法．多分辨分析（MRA）也是小波分析的核心内容之一，其系统和过程符合人类视觉和思维方式．Mallat 算法在小波分析中的地位相当于 FFT 在经典 Fourier 分析中的地位．对小波基的构造及性质的研究，快速小波算法及小波应用研究便构成小波分析研究的主要内容．

4　小波理论的应用现状

小波的提出先是取得了应用成果（如 Morlet 在地震数据中的处理等），再形成理论，最后在应用领域全面铺开，因而具有实用价值．它已经和将要被广泛应用于信号处理、图象处理、量子场论、地震勘探、话音识别与合成、音乐、雷达、CT 成像、彩色复印、流体湍流、天体识别、机器视觉、机械故障诊断和监控、分形以及数字电视等科技领域．随着小波应用的广度和深度的进一步拓展，某些方面已取得了传统方法无法达到的效果．

下面就小波分析成功应用的几个方面作以介绍，以说明小波分析的实用价值与意义．

1）小波分析在信号处理中的应用

目前，小波分析已成为信号处理的一种新工具和新方法，且取得了很多成功的应用．如：信号的分解和重构，信号消噪，信号的奇异性检测与分析，模式识别等．小波分析在图像处理，图像特征提取，图像识别等方面的应用最为成功．北京大学，清华大学联合研制的“基于小波分析的指纹处理系统”，特别是北邮推出的“基于微机并行处理的指纹识别系统”更是把小波在指纹方面的应用推向高潮，其理论指标已超过美国 FBI 的结果．消噪是信号处理中经典问题，传统的消噪方法多采用平均或线性方法，如 Wiener 滤波．随小波理论的日趋完善，利用小波进行信号消噪及重构得到了广泛应用．其方法有：小波模极大值去噪法，基于小波变换的相关去噪算法，小波阈值去噪方法．最早的阈值去噪方法是 Donoho 提出的 Visushrink 方法[13]，后来在此基础上作了许多的改进[14~17]．文献 [14] 提出了几种改进方案：多项式插值法，软硬阈值折中法和模平方处理方法，都得到了较好的效果．在 [15] 中克服传统小波消噪方法中局部信息丢失的缺陷，提出了一种基于第二代小波变换的非线性小波变换预处理方法，非常有效地应用在故障信息特征的提取中．把小波技术应用于机械故障的诊断也是一个重要的应用方面．如：文献 [18] 把小波分析，分形理论和混沌理论等非线性理论相结合，对汽轮发电机组转子故障进行了综合分析和研究，为此领域提供了有效的技术手段．

2）小波分析在数据压缩中的应用

在数据压缩中，小波分析的应用是很成功的．随着多媒体，信息高速路等技术的发展，数据压缩已成为信息传输中的瓶颈问题，其重要性愈见显著．利用小波变换进行数据压缩编码可以提高压缩比，而且可消除“方块效应”和“蚊式效应”．目前，基于小波变换的图像压缩方法已经逐步取代基于离散余弦变换（DCT）或者其他子带编码技术，成为新的图像压缩国际标准的首选方法．目前国际上最为流行的三种基于小波变换的图像编码方法有[19]：渐进式图像编码，基于行的图像编码，嵌入式块最优截断（EBCOT）编码．（EBCOT）编码方法主要由 Taubman 与 Marcellin 等人于 1999 年首先提出，使（EBCOT）进行图像编码不仅能实现对图像的有效压缩，同时产生的码流具有分辨率可伸缩性，信噪比可伸缩性，随机访问和处理等．因此，在最近推出的国际静态图像压缩 JPEG2000 标准中，联合国图像专家组选定以该算法作为 JPEG2000 的核心算法．

3）小波分析在数学领域中的应用

在数学领域，小波理论也有着十分重要的应用．小波分析是数值分析强有力的工具，能简捷、有效地求解偏微分方程和积分方程，亦能很好地求解线性问题和非线性问题，极大的丰富了数值分析方法的内容[20~24]．如：**Beylin-Coifman-Rokhlin** 的论文为用小波方法与边界元方法求解偏微分方程提供了标准．用小波方法分析数学中“处处连续但处处不可导”问题特别有效．文献 **[23]** 提出了求解常系数微分方程 **Sobolev** 正交小波有限元方法，在文献 **[24]** 中介绍了 **Burgers** 方程的小波精细积分算法．

5　小波分析研究未来的发展趋势

小波分析从诞生到现在虽然时间很短，但其发展是迅速的，尽管目前已得到了许多重要的结论和方法，但仍有许多问题有待进一步的研究．

1）在小波的数学理论基础研究方面：函数空间的刻画，基数插值小波，高维小波，向量小波，框架的研究还需进一步的深入．比如就向量小波来说，经典的小波理论以空间中小波$\psi(t)$与信号 $f(t)$ 作内积而定义的小波变换为基础，我们称其数量积小波理论．但随着应用的深入，它表现出一些不足：对信号整体作内积，会使信号一开始就被磨光而平滑掉某些重要信息，减弱提取信号特征和奇异性的精度，且多级小波分解会加剧这种情况的发生，从而影响分析信号的整体效果．实际中，因为非张量积且较实用的高维小波基不多见，常常用低维的小波基作张量积来构造高维小波基．用张量积构造的小波基来分析信号，会保留了各种同性特征，同时有可能失掉各向异性特征．所以只得另辟蹊径，提出建立一种新型小波变换：“矢量积小波变换”及相应算法．实际中，我们往往希望对称紧支撑的正交小波，但不幸的是这种小波（除 **Haar** 外）根本不存在．但框架的条件较弱，所以它拥有许多正规正交基所不能拥有的重要性质．如：对称性，插值性．且对框架，特别是紧框架 $\{f_n\}$ 来说，**Hilbert** 空间中的任意元素 x 可表示为：$x=\sum c_n f_n$，其系数 $\{c_n\}$ 一般不唯一，这更有利于我们根据实际应用的需要选择合适的系数．如何构造一些高逼近阶，更短支集，更少生成元的框架也应是我们关注的问题．

2）在应用研究方面：针对具体实际问题，如何构造选择最优小波基及框架的系统方法一直是人们关注的问题之一．仿真和实验对小波分析是重要的，且取得了丰硕的成果．如何让仿真和实验结果走出实验室，向人们提供具有实用价值的小波分析技术，开发以小波作为工具的高水平分析软件将吸引更多学者来进行研究．小波应用的范围虽广，但真正取得极佳效果的领域并不多，人们也正在挖掘有前景的应用领域．

3）与其它理论的结合：小波分析刚刚打开一扇不稳定，不统一，非时间不变的信号处理的大门，这个领域远比 **Fourier** 分析处理的时不变系统复杂．在这个大领域里，小波分析是一个重要工具，同时也需要其他的理论和工具．最近几年，一些学者将小波变换与神经网络、模糊数学、分形分析、遗传优化等方法相结合，形成的小波神经网络、小波模糊网络、小波分形等方法是分析非平稳，非线性问题的理想手段，并已取得了一些可喜的成果．小波分析本身是一门交叉学科，将小波分析与其他理论的综合运用是今后小波变换技术发展的必然趋势．

参考文献：

[1] 冉启文，谭立英，等．小波分析与分数傅立叶变换及其应用 [M]．北京：国防工业出版社，2002．1~5.

[2]Little wood J.E., et al. Theorems on Fourier series and power series, J.L.M.S., 1931, 6:230~238.

[3]Chui C.K., An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992.

[4]Mallat S.A., Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation IEEE Trans. On PAMI, 1989, 11(7):674~693.

[5]Mallat S., Multiresolution and Wavelets, Philadelphia: university of Pennsylvania, 1988.

[6]Daubechies I., Orthonormal Bases of Compactly supported Wavelets, Communications on pure and Applied Math, 1988(41):909~996.

[7]Chui C.K., Wang J.Z., A Cardinal spline Approach to Wavelet, proc. Amer. Math. Soc., 1991(113):785~793.

[8]Special issue on adaptive wavelet transforms, Opt. Eng., 1994, 33 (7).

[9]Special issue on Wavelet transforms and multiresolution analysis, IEEE Trans. Inform. Theory, 1992:38(2).

[10]Sweldens w. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets, J. Math. Anal. 1997, 29(2): 511~546.

[11] 曹怀信，赵建伟．小波分析发展综述 [J]．咸阳师范学院学报，2002（17）：6.

[12] 邓东皋，彭立中．小波分析，数学进展 [J]．1991，20（3）：294~310.

[13]Donoho D. L., De-noising by soft-thresheding, IEEE Trans. On information theory, 1999 (41):617~627.

[14] 徐晨，赵瑞珍，等．小波分析应用算法 [M]．北京：科技出版社，2004.

[15] 段晨东，何正嘉．非线性小波变换在故障特征提取中的应用 [J]．振动工程学报，2005，1.

[16] 崔华，宋国乡．基于小波阈值去噪方法的一种改进方案 [J]．现代电子技术，2005，1.

[17] 傅燕，赵容椿．小波变换在地震噪声处理中的应用 [J]．西北工业大学学报，2004，6.

[18] 侯荣涛，闻邦椿．基于现代非线性理论的汽轮发电机组故障诊断技术研究 [J]．机械工程学报，2005，2.

[19] 成礼智，王红霞，等．小波理论与应用 [M]．北京：科学出版社，2004.

[20] 左孔天，陈立平．求解拓扑优化问题的一种移动渐进小波混合算法 [M]．2004．4．
[21] 高夫征．求解欧拉方程组的一类新型自适应多分辨格式 [J]．山东大学学报，2003，6．
[22] 贾晓峰．求解波动方程的任意差分精细积分方法 [M]．北京：中国地震，2003．3．
[23] 熊联欢，等．求解常系数 ODE 的 Sobolev 正交小波有限元法 [J]．华中理工大学学报，1997，25（5）：76~78．
[24] 梅树立，等．Burgers 方程的小波精细积分算法 [J]．计算力学学报，2003，1．

A Survey of Developments and Applications of Wavelet Analysis

LI Jian-hua[1] LI Wan-she[2]

（1.Department of Mathematics, Hexi University, Zhangye, Gansu 734000, China;
2.College of Mathematics and Information Science, Shanxi Normal University, Xi'an, Shanxi 710062, China）

Abstract: Wavelet analysis comes from Fourier analysis and develops it. It has broadened application field. This paper introduces Wavelet analysis's background, development course and the present applying situation, and summarizes some successful applications of it from several aspects. Lastly, further development trend for wavelet research is discussed.

Key words: Wavelet transform; Gabor transform; Fourier transform; signal de-noising; data compression

［责任编辑 晏兴学］

（上接第 19 页）

Graphs[I]. J Combin Theory Ser B, 75(1999) 288~301.

[3]Balister P N, Bollobas B, Schelp R H, Vertex-distinguishing Colorings of Graphs with △ (G)=2[I], Discrete Mathematics, 252(2002):17~29.

[4]Zhongfu Zhang, etc. Adjacent Strong Edge Coloring of Graphs[I]. Applied Mathematics Letters, 15(2002) 623~626.

[5]Bondy J A and Marty U S R, Graph Theory with Applications[M]. The Macmillan Press Ltd, New York, 1976.

[6]Hansen P, Marcotte O, Editors, Graph Coloring and Application[M]. AMS providence, Rhode Island USA, 1999.

The Adjacent Vertex-Distinguishing Edge Coloring of $C_m \bullet S_n$

LIU Jun ZHAO-Chuan-cheng REN-Zhi-guo BAO Shi-tang

（Institute of Information Technology Application, Lanzhou Normal College, Lanzhou 730070,P.R.China）

Abstract: Supposing $V(C_m \bullet S_n)=\{u_i \mid i=1,2,\cdots,m\}\cup\{v_{ij}\mid i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$, $E(C_m \bullet S_n)=\{v_{11}v_{21},v_{21}v_{31},\cdots v_{(m-1)1}v_{m1},v_{m1}v_{11}\}\cup\{u_iv_{ij}\mid i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$. In this paper, we present Adjacent Vertex-distinguishing Edge Chromatic Number of $C_m \bullet S_n$.

Key words: Graph; Cycle; Star; Adjacent Vertex-distinguishing Edge Coloring

［责任编辑 晏兴学］