第35卷 第3期 陕西师范大学学报(自然科学版) Vol.35 No.3
2007年9月 Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition) Sep. 2007

·综合评述·

文章编号:1672-4291(2007)03-0113-07

超小波发展综述

李万社, 王凤兰
(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

摘 要:从问题发展的角度,论述了超小波在理论数学中的发展及其成果,简介了规范紧框架小波扩展为超小波的性质以及利用仿射结构构造超小波的方法,给出了一些公开问题,指出了新的研究方向.超小波是基于小波分析基础上的信号分析方法,关于规范紧框架小波扩展成超小波已经得到了一些重要结果,但是规范紧框架小波扩展为超小波的充分和必要条件还是一个公开问题,而且关于MRA超小波的一些重要方面也是公开的.

关键词:超小波;规范紧框架小波;仿射结构
中图分类号:O174.2 文献标识码:A

A survey of developments of super-wavelets

LI Wan-she, WANG Feng-lan
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China)

Abstract: From the development of the problem, developments the super-wavelets in theory mathematics and their achievements are discussed. The characters of extending a normalized tight frame wavelet to a super-wavelet and the construction methods of super-wavelets by using affine structure are introduced. Lastly, a few open problems are listed and some new possible directions of research one pointed out. The super-wavelet is a signal analysis method based on wavelet analysis. There are some important results on extending a normalized tight frame wavelet to a super-wavelet, but there are some open problems on finding a sufficient and necessary condition for a normalized tight frame wavelet to be extended to a super-wavelet and the important aspects of the MRA super-wavelets also open.

Key words: super-wavelet; normalized tight frame wavelet; affine structure
MR Subject classification: 42C40

小波分析是1986年以来由Y. Meyer、S. Mallat与I. Daubechies等众多数学家的奠基工作而迅速发展起来的一门应用数学学科,近年来得到迅速的发展.从数学的理论角度看,小波分析是调和分析半个世纪发展的结晶;从数学的应用角度看,它已经被广泛应用于信号处理、图像处理、非线性科学和工程等领域.总之,小波分析对当前的理论科学、应用科学,尤其是信息科学产生了重要影响,对非线性问题、智能计算、网络安全与信息安全研究有很好的推动作用,具有牵一发而动全局的影响力,并在国际范围内形成研究热点,其发展方兴未艾.

小波分析中的超小波(super-wavelets)是指较大空间 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}=L^2(\mathbf{R})\oplus\cdots\oplus L^2(\mathbf{R})$(超空间)中的小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$,是基于小波分析基础上的信号分析方法.1999年文献[1]首次提出了超框架的概念,2000年文献[2]对其进一步研究,完整的给出了超小波的定义,其理论最近几年得到快速发展.超小波的独特之处在于,它对解决信号的多重性

收稿日期:2007-01-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571113)
作者简介:李万社,男,教授,主要从事智能信号处理研究.

问题有小波无法比拟的优势,比如在数据压缩方面,当有同样的数据时,超小波不仅可以同时压缩多个信号,而且压缩比远比通常的小波高.可以预计,超小波将被广泛用于图像处理、语音信号处理、高清晰电视系统等方面. 可以看出,超小波是近几年来小波分析理论发展的一个重要研究方向,已引起国内外广泛的关注.近几年来,关于规范紧框架小波扩展成超小波虽然已经得到一些重要结果,但是规范紧框架小波扩展为超小波的充分和必要条件还是一个公开问题,而且关于 MRA 超小波的一些重要方面也是公开的,可以预计其发展将对小波的理论和应用产生重要的影响.

本文从问题发展的角度,着重论述超小波在理论数学中的发展及其研究成果,简介规范紧框架小波扩展为超小波的性质以及利用仿射结构构造超小波的方法,给出一些公开问题,指出新的研究方向,以期对小波理论的发展做出一点贡献.

1 研究历史

由于超小波在解决信号的多重性问题方面有小波无法比拟的优势,因此关于它的研究已经成为近几年的热点.目前超小波重要的理论成果是随着下面一系列问题发展而得到的:

(1) 令 ψ_1 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个规范紧框架小波,且不是一个正交小波.对某些正整数 m,是否总存在一个长度为 m 的超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$?对所有的 $m\geq 2$ 成立吗[2]?

(2) 是否存在某些规范紧框架小波 ψ_1 总能扩展成长度为 $m(m\geq 2)$ 的超小波[3]?

(3) 是否任意的 Frazier-Jawerth 类的框架小波都能扩展成长度为 $m(m\geq 2)$ 的超小波[3]?

(4) 哪些规范紧框架小波是可以扩展的[4]?

(5) 如果一个规范的紧框架小波 ψ 可扩展成长度为整数 $n(n>2)$ 的超小波,它必可扩展成长度为 $m(1<m<n)$ 的超小波吗?对任意的 $k>n$ 成立吗[4]?

(6) 当一个超小波的其中一个分量是 MRA 框架小波时,是否该超小波其余的每一个分量也是 MRA 框架小波呢[2]?

由于超小波的每一个分量都是规范紧框架小波,而不是正交小波.于是,2000 年文献[2]提出了上述问题(1),但在很长一段时间里,对该问题没有得到解决. 2004 年文献[3]对此问题给出了否定答案.既然如此,是否某些类型的规范紧框架小波满足问题(1)的要求,D. Han 和 D. Larson[2] 首先对该问题进行了研究,发现某个特殊类型的框架小波(Frazier-Jawerth 类的框架小波)是可扩展成超小波的,即:对 $n\geq 3$ 时,其结果是成立的,对 $n=2$ 的情况并未给出结果.但他们并未正式地提出该问题,文献[3]正式地提出问题(2)和(3),通过对 Frazier-Jawerth 类的框架小波进一步的研究,对问题(2)和(3)给出了肯定的答案. 那么,除了 Frazier-Jawerth 类的框架小波外,还有那些规范紧框架小波是可扩展的呢?在 2005 年,文献[4]提出了问题(4),他们研究了可分的框架小波和半正交的框架小波,发现当半正交的规范紧框架小波满足一定的条件时,也是可扩展为超小波的,并且对其答案做了进一步的证明.由于某些特殊类型的规范紧框架小波 ψ 的确可扩展成长度为整数 $n(n\geq 2)$ 的超小波,那么,ψ 必可扩展成长度比 n 小及比 n 大的超小波吗?于是,文献[4]提出了问题(5),并且对此问题进行了研究,虽然未给出答案,但是得到了一个与之有关的定理.因为 MRA 小波是小波的核心内容,超小波作为较大空间中的小波,当然有必要研究 MRA 超小波.于是,文献[2]提出了问题(6),并且给出了否定答案.关于超小波,除了对这些问题有所研究之外,好多的学者致力于超小波的构造,像文献[5]等构造了 MRA 超小波,文献[6]利用第二过采样定理构造超小波.目前,关于超小波当然还有一些其他的公开问题有待解决.本文很自然地从超小波问题发展的角度,详细地回答了上面一系列的问题,并且给出了其他一些重要的结果.

2 记号及定义

小波理论包含对 $L^2(\mathbf{R})$ 空间一种仿射结构的研究,即给定两个酉算子,平移算子 T 和伸缩算子 D,满足以下交换关系:$DTD^{-1}=T^k$,$k\geq 2$,$k\in\mathbf{Z}$,k 被称为尺度因子.在典型的小波理论中,空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的一般算子定义为以下形式:

平移算子:$Tf(x)=f(x-1)$,$x\in\mathbf{R}$,$f\in L^2(\mathbf{R})$;

伸缩算子:$Df(x)=\sqrt{k}f(kx)$,$x\in\mathbf{R}$,$f\in L^2(\mathbf{R})$,$k\geq 2$,$k\in\mathbf{Z}$;

超空间:$L^2(\mathbf{R})^{(m)}=L^2(\mathbf{R})\oplus\cdots\oplus L^2(\mathbf{R})$($m$ 个 $L^2(\mathbf{R})$,$m\geq 2$)(本文恒定 $m\in\mathbf{Z}^+$).

首先给出如下的定义:

定义 1 规范正交小波:令 $\psi\in L^2(\mathbf{R})$,如果集合 $\{D^kT^l\psi:k,l\in\mathbf{Z}\}$ 形成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组规范正交

基,则称 ψ是 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交小波. 当 ψ是一个规范正交小波时,有

$$f = \sum_{k,l\in\mathbf{Z}} \langle f, D^k T^l \psi\rangle D^k T^l \psi, \ \forall f \in L^2(\mathbf{R}) \quad (1)$$

成立.

由于规范正交小波的定义中条件要求相当严格,下面给出一个条件相对较弱的定义,即框架小波.

定义 2　框架小波:如果存在两个常数 A、B,其中 $0 < A \le B$,使得 $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$,有

$$A\|f\|^2 \le \sum_{k,l\in\mathbf{Z}} |\langle f, D^k T^l \psi\rangle|^2 \le B\|f\|^2 \quad (2)$$

成立,则称$\{D^k T^l \psi: k, l \in \mathbf{Z}\}$是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个框架,ψ是一个框架小波. 特别地,当 $A = B = 1$ 时,称 ψ是规范紧框架小波,此时上述框架条件(2) 成立,自然地有重构公式(1) 成立. 这表明在框架意义下,非正交的函数系也能精确地重构信号.

本文着重讨论超小波,下面给出超小波的确切定义.

定义 3[4]　超小波:假定 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的规范紧框架小波,$(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$ 是空间 $L^2(\mathbf{R})^{(m)} = L^2(\mathbf{R}) \oplus \cdots \oplus L^2(\mathbf{R})$ 的 m 元组. 若$\{D^k T^l \psi_1, D^k T^l \psi_2, \cdots, D^k T^l \psi_m : k, l \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 的一组规范正交基,则称$(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$是空间 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 一个长度为 m 超小波. 特别地,当集合$\{D^k T^l \psi_1, D^k T^l \psi_2, \cdots, D^k T^l \psi_m : k, l \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 的一组规范紧框架时,称$(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$是 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 的一个长度为 m 的规范紧框架超小波.

通过超小波的定义,可以看到超小波是一个 m 元组. 那么,如果能够利用一个规范紧框架超小波扩展为一个超小波,将是比较理想的.

下面给出一个规范紧框架小波扩展为一个超小波的定义.

定义 4[4]　m- 可扩展的:对规范紧框架小波 ψ_1,如果存在规范紧框架小波 $\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_m$ 使得$(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$是一个长度为 m 的超小波,则称规范紧框架小波 ψ_1 是 m- 可扩展的(或 m-extendable).

由于文献[4]提出并研究了超小波与可分框架小波之间的关系,因此有必要介绍可分的定义.

定义 5[4]　m- 可分的:如果一个规范紧框架小波 ψ等价于一个长度为 m 的规范紧框架超小波,则称 ψ是 m 可分的(或 m-decomposable).

前面定义了规范正交小波,下面给出半正交的规范紧框架小波定义,通过半正交定义会看到,半正交的规范紧框架小波类包含所有的规范正交小波,但其逆不成立.

定义 6　半正交的规范紧框架小波:假定 ψ是一个规范紧框架小波,如果有

$$\langle D^j T^{l_1}, D^i T^{l_2}\rangle = 0,$$
$$\forall j \ne i,\ j、i \in \mathbf{Z},\ \forall l_1、l_2 \in \mathbf{Z} \quad (3)$$

成立,则称 ψ是半正交的规范紧框架小波.

小波的成功之处在于 $L^2(\mathbf{R})$ 的多分辨分析(MRA) 的引入,正因为有 MRA 结构,才可以给出实现小波分析的快速算法. 因此,有必要在此介绍多分辨分析的定义.

定义 7　$L^2(\mathbf{R})$ 的多分辨分析(MRA):多分辨分析是指满足下述性质一列闭子空间$\{V_j\}, j \in \mathbf{Z}$:

(1) 一致单调性:$V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}$;

(2) 渐进完全性:$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;

(3) 伸缩规则性:$f \in V_j \Leftrightarrow Df \in V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}$;

(4) 平移不变性:$f \in V_0 \Rightarrow T^k f \in V_0, k \in \mathbf{Z}$;

(5) 正交基存在性:存在一个 $\phi \in V_0$,使得$\{T^k \phi : k \in \mathbf{Z}\}$是 V_0 的一组规范正交基(ϕ被称为尺度函数),其中正交基存在性条件可放宽为 Rieze 基存在性.

对不同的空间 $W_0 = V_1 - V_0$,总存在一个小波 $\psi \in W_0$,称这样的小波为 MRA 小波.

由于本文中提到的第一类可扩展的规范紧框架小波是 Frazier-Jawerth 类的框架小波,该定义是文献[7]首先提出的,下面给出其具体的定义.

定义 8　如果一个函数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ 满足

$$\mathrm{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ s : \frac{1}{2} \le |s| \le 2 \right\},$$
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^k s)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \ \forall s \ne 0, \quad (4)$$

则称 ψ是 Frazier-Jawerth 类的框架小波.

从下文将会看到,Frazier-Jawerth 类的框架小波满足引理 1 条件. 因此,Frazier-Jawerth 类的框架小波是规范紧框架小波.

关于信号的傅里叶变换,本文采用如下的标准定义.

定义 9　傅里叶变换:记 F为 f 的傅里叶变换,则

$$\hat{f}(x) = Ff(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}). \quad (5)$$

3　已取得的结果

前面定义了长度为 m 的超小波,然而,一个最基本的问题是超小波的存在性,即对任意的正整数

m(或 $m=+\infty$),是否存在长度为 m 的超小波?下面定理保证了任意长度超小波的存在性.

定理 1[2] 存在任意长度为整数 m(或 $m=+\infty$)的超小波.

1996 年,文献[8]给出关于规范正交小波和规范紧框架小波的充分和必要条件. 紧接着,2000 年文献[2]对 E. Hernandez 和 G. Weiss 的工作进一步推广,又给出了规范正交超小波的充分和必要条件,并由它们引出了超小波一系列的问题.

引理 1[8] 令 $\psi\in L^2(\mathbf{R})$,则 ψ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个规范正交小波,当且仅当 $\|\psi\|=1$,并且 $\forall k\in\mathbf{N}$,及几乎所有的 $s\in\mathbf{R}$,

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^k s)|^2=\frac{1}{2\pi}, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\psi}(2^k s)\cdot\overline{\hat{\psi}(2^k(s+2l\pi))}=0,\quad l\in2\mathbf{Z}+1. \tag{7}$$

另一方面,$\psi\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个规范紧框架小波当且仅当上面的两个等式(6)和(7)成立. 显然,规范正交小波和规范紧框架小波的不同之处在于 $\|\psi\|=1$.

引理 2[2] 令 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数,则 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是超小波当且仅当对每一个 $i=1,2,\cdots,m$ 及几乎所有的 $s\in\mathbf{R}$,以下等式成立

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}_i(2^k s)|^2=\frac{1}{2\pi}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\psi}_i(2^k s)\cdot\overline{\hat{\psi}_i(2^k(s+2l\pi))}=0,\quad l\in2\mathbf{Z}+1, \tag{9}$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{i=1}^{m}|\hat{\psi}_i(s+2l\pi)|^2=\frac{1}{2\pi}, \tag{10}$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{i=1}^{m}\hat{\psi}_i(2^k(s+2l\pi))\cdot\overline{\hat{\psi}_i(s+2l\pi)}=0,\quad k\in\mathbf{N}. \tag{11}$$

由引理 1 和 2 知,一个长度为正整数 $m(m\geq2)$ 的超小波的每一个分量 ψ_i 必是一个规范紧框架小波,而不是一个规范正交小波. 然而,我们却不能清楚地知道是否每一个规范紧框架小波就是某个超小波的分量. 因此,文献[2]提出以下问题:令 ψ_1 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个规范紧框架小波,而不是一个正交小波. 对某些正整数 m,是否总存在一个长度为 m 的超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$?对所有的 $m\geq2$ 成立吗?在很长一段时间里,该问题没有得到解决. 2004 年,文献[3]对此问题给出了答案,就是下面定理 2 的结论.

定理 2[3] 在空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中存在一个规范紧框架小波 ψ,不能扩展成任意长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波.

显然,此定理否定地回答了上述问题,知道并不是每一个规范紧框架小波都可作为某个超小波的分量,即并不是每一个规范紧框架小波都可扩展成任意长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波. 既然如此,是否某些类型的规范紧框架小波满足这样的要求,随之,又产生了以下问题:是否存在某些规范的紧框架小波 ψ_1,总能扩展成长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波?文献[2]首先对该问题进行了研究,发现 Frazier-Jawerth 类的框架小波是可以扩展成长度为整数 m 的超小波($\forall m\geq3$). 下面定理 3 就是对此结论的刻画.

定理 3[2] 令 ψ 是 Frazier-Jawerth 类的框架小波,则必存在规范紧框架小波 $\psi_2,\psi_3,\cdots,\psi_m$ 使得 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是一个长度为 m 的超小波($\forall m\geq3$).

显然,ψ 可扩展成长度为 m 的超小波($\forall m\geq3$)此定理部分地给出了上述问题的答案,对于当 $m=2$ 时,Frazier-Jawerth 类的框架小波能否扩展并没有得到验证. 为了对上述问题有全面的答案,又产生以下问题:是否任意的 Frazier-Jawerth 类的框架小波都能扩展成长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波?文献[3]对 Frazier-Jawerth 类的框架小波进一步研究,完善了定理 3 的结论,得出定理 4.

定理 4[3] 每一个 Frazier-Jawerth 类的框架小波总能扩展成长度为 2 的超小波.

结合定理 2 和定理 3,对上述问题肯定地给出了答案,即每一个 Frazier-Jawerth 类的框架小波总能扩展成长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波. 那么,除了 Frazier-Jawerth 类的框架小波外,还有哪些规范的紧框架小波可扩展是需要进一步讨论的. 因此,又有以下问题出现:哪些规范的紧框架小波是可以扩展的?文献[4]进一步研究了可分的框架小波和半正交的框架小波,发现当半正交的规范紧框架小波满足一定条件时,也是可扩展为超小波的,并且对其答案做了进一步的证明.

定理 5[4] 令 ψ_1 是一个半正交的规范紧框架小波,使得

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}_1(\zeta+2l\pi)|^2=\frac{1}{2\pi}\chi_{E_1} \tag{12}$$

成立,E_1 是 $\mathbf{R}$ 的 2π 平移不变子集. 记 $G_{\psi_1}=E_1\cap[-\pi,\pi)$,如果 $0\in[-\pi,\pi)\setminus\tau(E_1)$,则 ψ_1 可扩展成任意长度为 $m(m\geq2)$ 的超小波.

注 1 本文中,任意给定 $\mathbf{R}$ 的子集 E,记 $\tau(E)=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(E+2k\pi)$.

可以看到,除了 Frazier-Jawerth 类的框架小波外,满足上述定理条件的半正交的规范紧框架小波也可以扩展成长度为 $m(m \geq 2)$ 的超小波.

通过前面的讨论,可以知道规范紧框架小波 ψ 的确可扩展成长度为整数 $n(n \geq 2)$ 的超小波. 那么,ψ 必可扩展为长度比 n 小及比 n 大的超小波吗?于是产生下面的问题:如果一个规范的紧框架小波 ψ 可扩展成长度为整数 $n(n > 2)$ 的超小波,它必可扩展成长度为 $m(1 < m < n)$ 的超小波?对任意的 $k > n$ 成立吗?文献[4]对此问题进行了研究,虽然未给出答案,但是得到了下述定理.

定理 6[4]　对每一个整数 $n(n \geq 2)$,存在规范紧框架小波 ψ,可扩展成长度为整数 $m(1 < m \leq n)$ 的超小波,但不能扩展成长度为 $k(k > n)$ 的超小波.

显然,此定理未能对上述问题的第一部分做出回答,但是相信其答案应该是肯定. 同时,对不同的整数 $n(n \geq 2)$ 总可以找到对应的规范紧框架小波 ψ,使其扩展为长度比 n 小的超小波,但不能扩展成比 n 大的超小波.

小波分析中引入了多分辨分析(MRA). 在定义多分辨分析时,定义了 MRA 小波. 但是,并不是所有的规范正交小波都是 MRA 小波. 假定 ψ 是一个规范正交小波,空间 W_j 是由集合 $\{D^j T^l \psi : l \in \mathbf{Z}\}$ 生成,$V_j = \bigoplus_{k<j} W_k$,且 V_j 满足多分辨分析定义的条件时,称 ψ 是一个 MRA 小波. 当 ψ 是一个规范紧框架小波,且上述条件相同时(MRA 定义中条件(5)中的规范正交基换成规范紧框架),称 ψ 是 MRA 框架小波. 文献[2]已证 MRA 超小波在规范正交的情形并不存在,相反,当一个超小波 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$ 的每一个分量 ψ_i 是一个 MRA 框架小波时,称 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$ 是一个 MRA 超小波. 很自然,有人就会问,当一个超小波的其中一个分量是 MRA 框架小波时,是否该超小波的其他分量也具有同样的特点呢?文献[3]对此做出了回答,下面定理就是对该问题的答案.

定理 7[3]　存在一个超小波 (ψ_1, ψ_2) 使得分量 ψ_1 是一个 MRA 框架小波,但分量 ψ_2 不是一个 MRA 框架小波.

该长度为 2 的超小波说明了当超小波的一个分量为 MRA 框架小波时,并不是其他的每一个分量也是 MRA 框架小波.

关于规范紧框架小波扩展成超小波已经得到了一些重要结果,但是规范紧框架小波扩展为超小波还有一些公开问题,而且关于 MRA 超小波的一些重要方面也是公开的.

4　规范紧框架小波可扩展的性质

规范紧框架小波扩展为超小波是超小波理论的一个重要方面,因此有必要在此介绍可扩展的一些性质. 在前面定理 5 中,关于规范紧框架小波扩展为超小波给出了一个充分条件,下面给出规范紧框架小波扩展为超小波的其他一些性质.

性质 1[2]　任何正交小波是不能扩展的.

因此,本文中所说的小波的扩展指的都是规范紧框架小波的扩展.

性质 2[4]　如果 ψ 是一个规范紧框架小波,并且 ψ 可扩展成长度为 m 的超小波,则

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1 - \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\zeta + 2l\pi)|^2}{|\zeta|} \mathrm{d}\zeta \geq \frac{1}{2\pi}(m - 1)\ln 2, \tag{13}$$

$$\int_{2\pi}^{0} \frac{1 - \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\zeta + 2l\pi)|^2}{|\zeta|} \mathrm{d}\zeta \geq \frac{1}{2\pi}(m - 1)\ln 2. \tag{14}$$

成立,上面的积分可以是无限的.

性质 3[4]　如果 ψ 是一个规范紧框架小波且 ψ 可扩展成长度 m 的超小波,则

$$\int_{\pi}^{\pi} \frac{1 - \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\zeta + 2l\pi)|^2}{|\zeta|} \mathrm{d}\zeta \geq \frac{1}{2\pi} \cdot 2(m - 1)\ln 2, \tag{15}$$

成立,上面的积分可以是无限的.

性质 4[4]　令 ψ 是一个半正交的规范紧框架小波,且存在整数 $m(m \geq 2)$,如果对几乎所有

$$\zeta \in \left[-\pi, -\frac{1}{2}\pi\right) \cup \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right),\text{有}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{I \setminus G_{\psi}}(2^{-k}\zeta) \geq m - 1 \tag{16}$$

成立,则 ψ 可扩展为长度为 m 的超小波.

显然,性质 2、3 是规范紧框架小波可扩展的必要条件,定理 4、5 是分别为充分条件. 那么,有没有充分和必要条件呢?其实,给出规范紧框架小波可扩展的一个刻画是目前的一个公开性问题.

5　超小波的构造方法

小波函数的构造是小波理论分析与应用研究的

基础,不同的小波函数具有不同的光滑性、消失矩、对称性等指标,如何根据所处理的信号特征构造或者选择最佳的小波函数,提高信号处理的效率与质量是小波理论与应用研究的目的. 那么,既然超小波是小波基础上的信号分析方法,如何根据所处理的信号特征构造或者选择最佳的超小波函数应该成为研究的问题之一.

利用希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的仿射结构 D 和 T 产生小波的一般方法是:如果集合 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$ 使得仿射系统 $\{D^j T^l \psi_i : j, l \in \mathbf{Z}, i \in 1, \cdots, m\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 的一组规范正交基,称 $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)$ 是 $L^2(\mathbf{R})^{(m)}$ 的一个小波(超小波). 通常,也可要求此仿射结构形成的是一个框架.

随着超小波理论的不断发展,许多学者致力于构造超小波,最主要的方法是利用仿射结构构造超小波. 到目前为止,有 3 种构造法.

方法 1 文献[2]已经证明在超空间 $L^2(\mathbf{R})^{(m)} = L^2(\mathbf{R}) \oplus \cdots \oplus L^2(\mathbf{R})$ 中,可构造一个仿射结构和超小波,此仿射结构为 $T_0 = T \oplus \cdots \oplus T$, $D_0 = D \oplus \cdots \oplus D$,利用这个仿射结构可构造超小波,但该超小波的每个分量都不是 MRA 小波.

方法 2 紧接文献[2]的工作,文献[5]构造了 MRA 超小波,考虑了以下循环,一个点集 $\{z_1, \cdots, z_p\} \subset T = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$,若 z_i 各不相同且 $z_1^k = z_2, \cdots, z_{p-1}^k = z_p, z_p^k = z_1$,则称 $\{z_1, \cdots, z_p\}$ 是一个循环. 利用此循环定义的仿射结构为

$$T_0(f_1, \cdots, f_p) = (z_1 Tf_1, \cdots, z_p Tf_p),$$
$$U_0(f_1, \cdots, f_p) = (Df_2, Df_3, \cdots, Df_p, Df_1),$$
$$f_1, f_2, \cdots, f_p \in L^2(\mathbf{R}).$$

对不同的循环,做这些表示的有限直和,可得到新的仿射结构. 此仿射结构的优点是可产生一个 MRA 超小波.

方法 3 此方法适用于更一般的 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 情形,文献[6]利用第二过采样定理构造超小波,其仿射结构定义为

$$T_{p^{-1}k}(f_q)_{0 \le q \le p-1} = (\mathrm{e}^{2\pi i \cdot \theta_q^*} T_{p^{-1}k} f_q)_{0 \le q \le p-1},$$
$$(k \in \mathbf{Z}^d);$$
$$D(f_q)_{0 \le q \le p-1} = (Df_{(\sigma^*)^{-1}(q)})_{0 \le q \le p-1}.$$

并且满足交换关系 $DT_{MP^{-1}k} = T_{P^{-1}k}D$, $k \in \mathbf{Z}^d$. 由此仿射结构既可以得到一个框架超小波,也可以得到一个超小波.

注 1 $T_u f(x) = f(x - u)$, $u \in \mathbf{R}^d$, $Df(x) = \sqrt{|\det \mathrm{M}|} f(\mathrm{M}x)$, $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$. M 是矩阵,且 M 是允许过采样矩阵.

6 超小波的应用研究

超小波作为一种特殊的信号分析方法,由于其理论发展还处于初始阶段,这方面应用的研究比较少,仅散见于文章评述性结论,这也是超小波值得进一步研究的理由. 目前应用方面主要是:利用超小波可以同时压缩多个不同的信号,解决信号的多重性问题,利用离散的超小波变换可进行双正交的小波滤波谱分析. 可以预见,随着小波分析理论的不断发展,超小波在信号去噪、数据压缩、图像分析、语音信号处理、高清晰电视系统等领域将发挥不可替代的作用,其应用前景相当广泛.

7 讨论

前面指出了如何根据所处理的信号特征构造或者选择最佳的超小波函数应该成为将来研究的问题之一,其次,将其数学理论应用到实践,利用超小波解决一些实际问题,比如信号去噪、数据压缩、图像分析、语音信号处理、高清晰电视系统等,还需要进一步的探究. 小波分析中的超小波理论虽然快速发展,已拥有许多重要的结论,但仍有许多公开的问题有待解决. 例如:

问题(1)[4] 规范紧框架小波扩展为超小波的充分和必要条件是什么?

问题(2) 除本文所提的两类特殊的规范紧框架小波外,还有哪些是可扩展的?

问题(3) 讨论 MRA 超小波的其他方面?

文献[4]认为规范紧框架小波满足这样的性质,即如果一个规范紧框架小波 ψ 可扩展为长度为 m 的超小波,则它可扩展为任意长度为整数 $k(k < m)$ 的超小波. 因此有与前文研究历史中的问题(5)第一部分有关的猜想.

猜想:如果一个规范紧框架小波可扩展成长度为 m 的超小波,则它可扩展为长度为任意整数 $k(1 < k < m)$ 的超小波. 在半正交的情况下,以上猜想与下面的问题有关.

问题(4)[9] 假定 ψ 是一个规范紧框架小波,是否存在一个规范紧框架集 F,使得 $\tau(F) \subset \tau(\mathrm{supp}\,\hat{\psi})$ 成立?

如果该问题得到肯定回答,则有下面结论成立,即如果一个规范紧框架小波 ψ 是 m 可分的,当所有分量中有两个分量是半正交时,则 ψ 是 $m-1$ 可分的. 类似地,如果一个规范紧框架小波 ψ 可扩展为长

度为 m 的超小波,当所有分量中有两个分量是半正交时,则它可扩展为长度为 $m-1$ 的超小波.

除了本文提到的这些问题,当然还有许多开放问题有待解决,也正是如此多的问题存在,吸引了更多的学者来研究超小波,使得它的理论才得以更加完善.

参考文献:

[1] Bilan R. Density and redundancy of the noncoherent weyl-heisenberg superframe [J]. Journal of Contemporary Mathematics, 1999, 247:29-41.

[2] Han D, Larson D. Frames, bases and group representations [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2000, 147 (697):1-88.

[3] Dai X, Diao Y, Gu Q. On super-wavelets[J]. Operator Theory: Advances and Applications, 2004, 149:153-165.

[4] Gu Qing, Han Deguang. Super-wavelets and decomposable wavelet frames [J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2005, 11(6):684-696.

[5] Bildea S, Dutkay D E, Picioroaga G. MRA super-wavelets [J]. New York Journal of Mathematics, 2005, 11:1-19.

[6] Dutkay D, Jorgensen P. Oversampling generates super-wavelets [J]. Proceeding of the American Mathematical Society, 2007, 135: 2 219-2 227.

[7] Frazier M, Jawerth B. A discrete transform and decomposition of distribution spaces [J]. Journal of Functional Analysis, 1990, 93:34-170.

[8] Hernandez E, Weiss G. A first course on wavelets [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[9] Larson D. Von Neumann algebras and wavelets [J]. Operator Algebras and Applications, 1997, 495:267-312.

[10] Dutkay D E. The local trace function for super-wavelets [J]. Journal of Contemporary Mathematics, 2003, 345 (2):115-136.

[11] Weber E. Orthogonal frames of translates [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2004, 17:69-90.

[12] 程正兴. 小波分析与应用实例[M]. 西安:西安交通大学出版社,2006:12-15.

[13] 李万社,刘志国. 一种有效的小波紧框架设计[J]. 西安电子科技大学学报,2006,39(4): 665-669.

[14] 李万社,郭晓旋. 框架和 Riesz 基的稳定性[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2006,34(4) : 7-12.

[15] 程正兴. 小波分析在图像处理中的应用[J]. 工程数学学报,2001,18(5):57-86.

[16] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安:西安交通大学出版社,1999:33-62.

[17] Daubechies I. 小波十讲[M]. 李建平,杨万年,译. 北京:国防工业出版社,2004: 56-102.

[18] 程蓉,李万社. 利用两尺度相似变换提高有限元多尺度函数的逼近阶[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2005,33(2):22-25.

[19] 成礼智,王红霞,罗永. 小波的理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2004:76-79.

[20] 李建华,李万社. 小波理论及其应用[J]. 河西学院学报,2005,22(2):1-7.

[21] Dai X, Diao Y, Gu Q. Frame wavelet sets in R[J]. Proceeding of the American Mathematical Society, 2002, 129(7): 2 045-2 055.

[22] Bownik M. The structure of shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbf{R}^n)$ [J]. Journal of Functional Analysis, 2000, 177: 282-309.

[23] Dai X, Diao Y, Gu Q, et al. Frame wavelets in subspaces of $L^2(\mathbf{R}^d)$ [J]. Proceeding of the American Mathematical Society, 2002, 130(6):1 661-1 667.

[24] Mallat S. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华,戴道清译. 北京:机械工业出版社,2002:9-16.

[25] Dai X, Larson D. Wavelet sets in $\mathbf{R}^n$ [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2000, 147(697):1 121-1 322.

[26] 姚喜妍. 小波分析中的框架理论发展综述[J]. 运城学院学报,2005,23(5): 7-9.

[27] 曹怀信,赵建伟. 小波发展综述[J]. 咸阳师范学院学报,2002,17(6):5-8.

[28] Zou Qingyun. Biorthogonal wavelet filters spectral analysis by discrete super-wavelet transforms [J]. Mathematics Theory Applied, 2005, 25(1):56-58.

[29] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京:科学出版社,2003:39-40.

[30] Dutkay D. Harmonic analysis of signed Ruelle transfer operators [J]. Mathematics Analysis applied, 2002, 273: 590-617.

[31] Dutkay D. The wavelet Galerkin operator[J]. Operator Theory, 2004, 51:49-70.

[32] Lawton W. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases[J]. Mathematical Physics, 1991, 32:57-61.

[33] Kim H, Lim J. On frame wavelets associated with frame multiresolution analysis [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, 10:61-70.

[34] Mallat S. A theory of multiresolution approximations and wavelet orthonormal basis of $L^2(\mathbf{R})$ [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, 315:69-167.

[35] Benedetto J, Li S. The theorem of multiresolution analysis frames and application to filter banks[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1998, (5): 398-427.

〔责任编辑　张惠民〕