

## 第4讲 离散小波变换的多分辨率分析

### 4.1 多分辨率分析的引入

### 4.2 多分辨率分析的定义

### 4.3 空间 $V_j$ 、 $W_j$ 中信号的分解

### 4.4 二尺度差分方程

### 4.5 二尺度差分方程与共轭正交滤波器组

### 4.6 Mallat 算法

### 4.7 Mallat 算法的实现

### 4.8 小波变换小结

在实际应用中，特别是在计算机上实现小波变换时，信号总要取成离散的，因此，研究  $a, b$  及  $t$  都是离散值情况下的小波变换，进一步发展一套快速小波变换算法将更有意义。由 Mallat 和 Meyer 自 80 年代末期所创立的“多分辨率分析”技术，起到了关键的作用。该算法和多抽样率信号处理中的滤波器组及图像处理中的金字塔编码等算法结合起来，构成了小波分析的重要工具。本讲讨论多分辨率分析的定义、算法及应用。

## 4.1 多分辨率分析的引入

### 4.1.1 信号的分解近似

现以信号的分解近似为例来说明多分辨率分析的基本概念。

给定一个连续信号  $x(t)$ ，我们可用不同的基函数并在不同的分辨率水平上对它作近似。

如图 4.1.1(a) 所示，令

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

显然， $\phi(t)$  的整数位移相互之间是正交的，即

$$\langle \phi(t-k), \phi(t-k') \rangle = \delta(k-k') \quad k, k' \in Z \quad (4.1.2)$$

这样，由  $\phi(t)$  的整数位移  $\phi(t-k)$  就构成了一组正交基。设空间  $V_0$  由这一组正交基所构成，

这样， $x(t)$  在空间  $V_0$  中的投影（记作  $P_0 x(t)$ ）可表为：

$$P_0 x(t) = \sum_k a_0(k) \phi(t-k) = \sum_k a_0(k) \phi_{0,k}(t) \quad (4.1.3)$$

式中  $\phi_{0,k}(t) = \phi(t-k)$ ， $a_0(k)$  是基  $\phi_{0,k}(t)$  的权函数。 $P_0 x(t)$  如图 4.1.1(b) 所示，它可以看作是  $x(t)$

在  $V_0$  中的近似。 $a_0(k)$  是离散序列，如图 4.1.1(c) 所示。

令

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \quad (4.1.4)$$

是由  $\phi(t)$  作二进制伸缩及整数位移所产生的函数系列，显然，对图 4.1.1(a) 的  $\phi(t)$ ， $\phi_{j,k}(t)$

和  $\phi_{j,k'}(t)$  是正交的。这一结论可证明如下：

因为  $\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k'}(t) \rangle = 2^{-j} \int \phi(2^{-j}t - k) \phi^*(2^{-j}t - k') dt$

令  $2^{-j}t = t'$ , 则  $t = 2^j t'$ ,  $dt = 2^j dt'$ , 再由 (4.1.2) 式, 有

$$\int \phi(t' - k) \phi^*(t' - k') dt' = \delta(k - k') \quad (4.1.5)$$

于是结论得证。

将  $\phi(t)$  作二倍的扩展后得  $\phi(\frac{t}{2})$ , 如图 4.1.1(g) 所示。由  $\phi(\frac{t}{2})$  作整数倍位移所产生的函数组

$$\phi_{1,k}(t) = 2^{-1/2} \phi(2^{-1}t - k), k \in Z$$

当然也是两两正交的 (对整数), 它们也构成了一组正交基。我们称由这一组基形成的空间为  $V_1$ , 记信号  $x(t)$  在  $V_1$  中的投影为  $P_1 x(t)$ , 则

$$P_1 x(t) = \sum_k a_1(k) \phi_{1,k}(t) \quad (4.1.6)$$

式中  $a_1(k)$  为加权系数。  $P_1 x(t)$  如图 4.1.1(h) 所示。  $a_1(k)$  仍为离散序列, 如图 4.1.1(i) 所示。

若如此继续下去, 在给定图 4.1.1(a) 的  $\phi(t)$  的基础上, 我们可得到在不同尺度  $j$  下通过作整数位移所得一组组的正交基, 它们所构成的空间是  $V_j, j \in Z$ 。用这样的正交基对  $x(t)$  作近似, 就可得到  $x(t)$  在  $V_j$  中的投影  $P_j x(t)$ 。

由图 4.1.1(a) 和图 4.1.1(g), 我们不难发现:

$$\phi(\frac{t}{2}) = \phi(t) + \phi(t-1) \quad (4.1.7)$$

再比较该图的 (b) 和 (h), 显然图 (b) 对  $x(t)$  的近似要优于图 (h) 对  $x(t)$  的近似, 也即分辨率高。所以, 用  $\phi_{j,k}(t)$  对  $x(t)$  作 (4.1.3), 或 (4.1.6) 式的近似,  $j$  越小, 近似的程度越好,

也即分辨率越高。当  $j \rightarrow -\infty$  时,  $\phi_{j,k}(t)$  中的每一个函数都变成无穷的窄, 因此, 有

$$P_j x(t) \Big|_{j \rightarrow -\infty} = x(t) \quad (4.1.8)$$

另一方面, 若  $j \rightarrow +\infty$ , 那么  $\phi_{j,k}(t)$  中的每一个函数都变成无穷的宽, 因此,  $P_j x(t) \Big|_{j \rightarrow \infty}$  时对  $x(t)$  的近似误差最大。按此思路及 (4.1.7) 式, 我们可以想象, 低分辨率的基函数  $\phi(\frac{t}{2})(j=1)$  完全可以由高一级分辨率的基函数  $\phi(t)(j=0)$  所决定。从空间上来讲, 低分辨率的空间  $V_1$  应包含在高分辨率的空间  $V_0$  中, 即

$$V_0 \supset V_1 \quad (4.1.9)$$

但是, 毕竟  $V_0$  不等于  $V_1$ , 也即  $P_0 x(t)$  比  $P_1 x(t)$  对  $x(t)$  近似的好, 但二者之间肯定有误差。这一误差是由  $\phi(t-k)$  和  $\phi(2^{-1}t-k)$  的宽度不同而产生的, 因此, 这一差别应是一些“细节”信号, 我们记之为  $D_1 x(t)$ 。这样, 有

$$P_0 x(t) = P_1 x(t) + D_1 x(t) \quad (4.1.10)$$

该式的含义是:  $x(t)$  在高分辨率基函数所形成的空间中的近似等于它在低分辨率空间中的近似再加上某些细节。现在我们来寻找  $D_1 x(t)$  的表示方法。

设有一基本函数  $\psi(t)$ , 如图 4.1.1(d) 所示, 即

$$\psi(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & 0 \leq t < 1/2 \\ -\mathbf{1} & 1/2 \leq t < 1 \\ \mathbf{0} & \text{其它} \end{cases} \quad (4.1.11)$$

很明显,  $\psi(t)$  的整数位移也是正交的, 即

$$\begin{aligned}\langle \psi(t-k), \psi(t-k') \rangle &= \int \psi(t-k) \psi^*(t-k') dt \\ &= \delta(k-k')\end{aligned}\quad (4.1.12)$$

进一步， $\psi(t)$  在不同尺度下的位移，即  $\psi_{j,k}(t)$ ,  $j, k \in Z$ ，也是正交的，即

$$\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{j,k'}(t) \rangle = 2^{-j} \int \psi(2^{-j}t-k) \psi^*(2^{-j}t-k') dt = \delta(k-k') \quad (4.1.13)$$

$\psi(t/2)$  如图 (j) 所示。同时， $\phi(t)$  和  $\psi(t)$  的整数位移之间也是正交的，即

$$\langle \phi(t-k), \psi(t-k') \rangle = 0 \quad k, k' \in Z \quad (4.1.14)$$

观察图 (a)，(d) 和 (g)，不难发现， $\psi(t)$  和  $\phi(t)$  之间有如下关系：

$$\phi(t) = [\phi(\frac{t}{2}) + \psi(\frac{t}{2})] / 2 \quad (4.1.15a)$$

及

$$\phi(2t-1) = [\phi(t) - \psi(t)] / 2 \quad (4.1.15b)$$

记  $\psi(t-k)$  张成的空间为  $W_0$ ， $\psi(2^{-1}t-k)$  所张成的空间为  $W_1$ ，依次类推， $\psi_{j,k}(t)$  张成的空间为  $W_j$ ，记  $x(t)$  在空间  $W_0$  中的投影为  $D_0x(t)$ ，在  $W_1$  中的投影为  $D_1x(t)$ ，它们均可表为相应基函数  $\psi_{j,k}(t)$  的线性组合，即

$$D_0x(t) = \sum_k d_0(k) \psi_{0,k}(t) \quad (4.1.16)$$

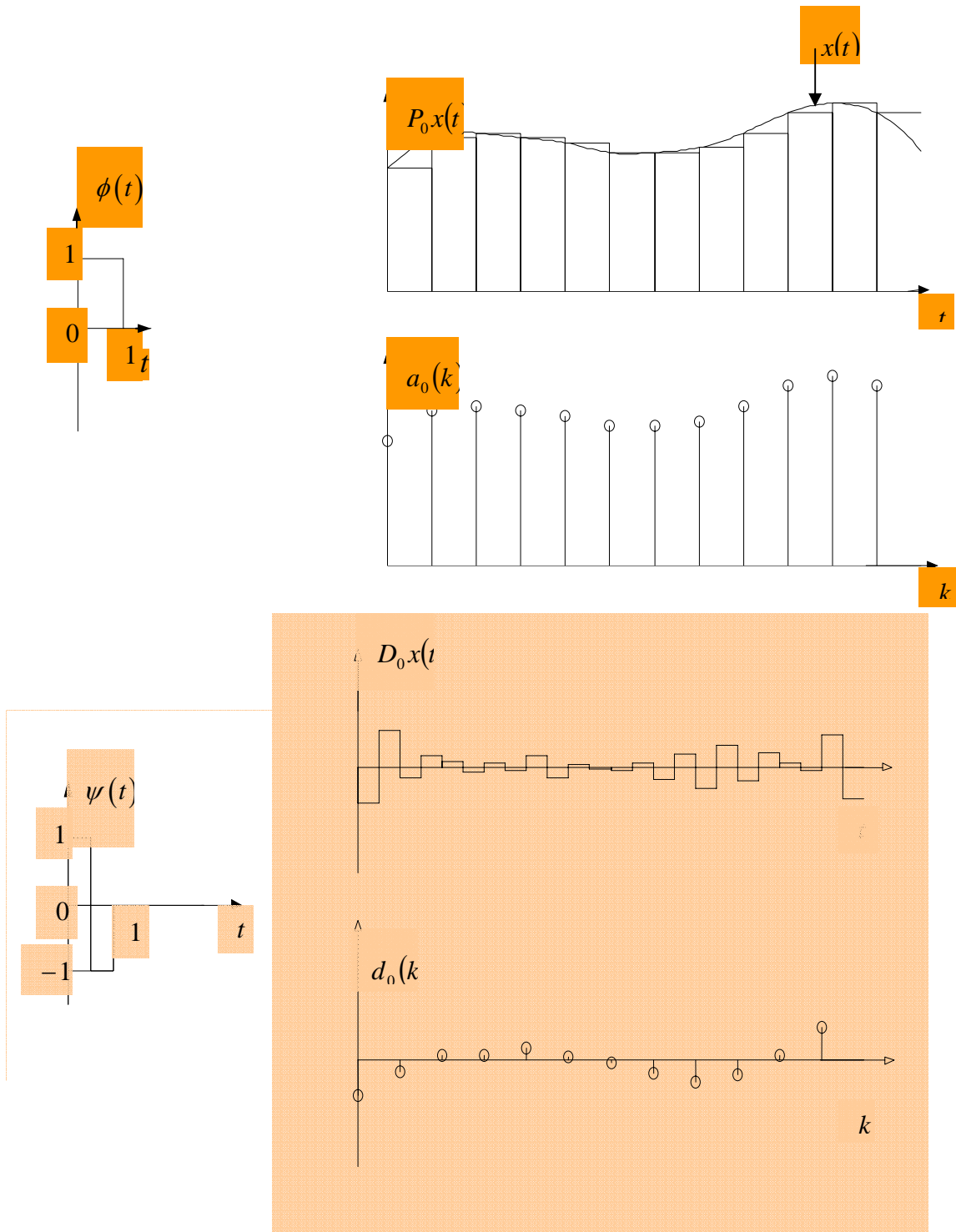
$$D_1x(t) = \sum_k d_1(k) \psi_{1,k}(t) \quad (4.1.17)$$

式中  $d_0(k)$ ， $d_1(k)$  是  $j=0$ ， $j=1$  尺度下的加权系数，它们均是离散序列。 $D_0x(t)$ ， $d_0(k)$  分别如

图 4.1.1 (e) 和 (f) 所示,  $D_1x(t)$ ,  $d_1(k)$  分别如图 (k) 和 (l) 所示。

由图 4.1.1 不难发现, 若将图 (h) 的  $P_1x(t)$  和图 (k) 的  $D_1x(t)$  相加, 即得图 (b) 的  $P_0x(t)$ , 由空间表示, 即是

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 \quad (4.1.18)$$



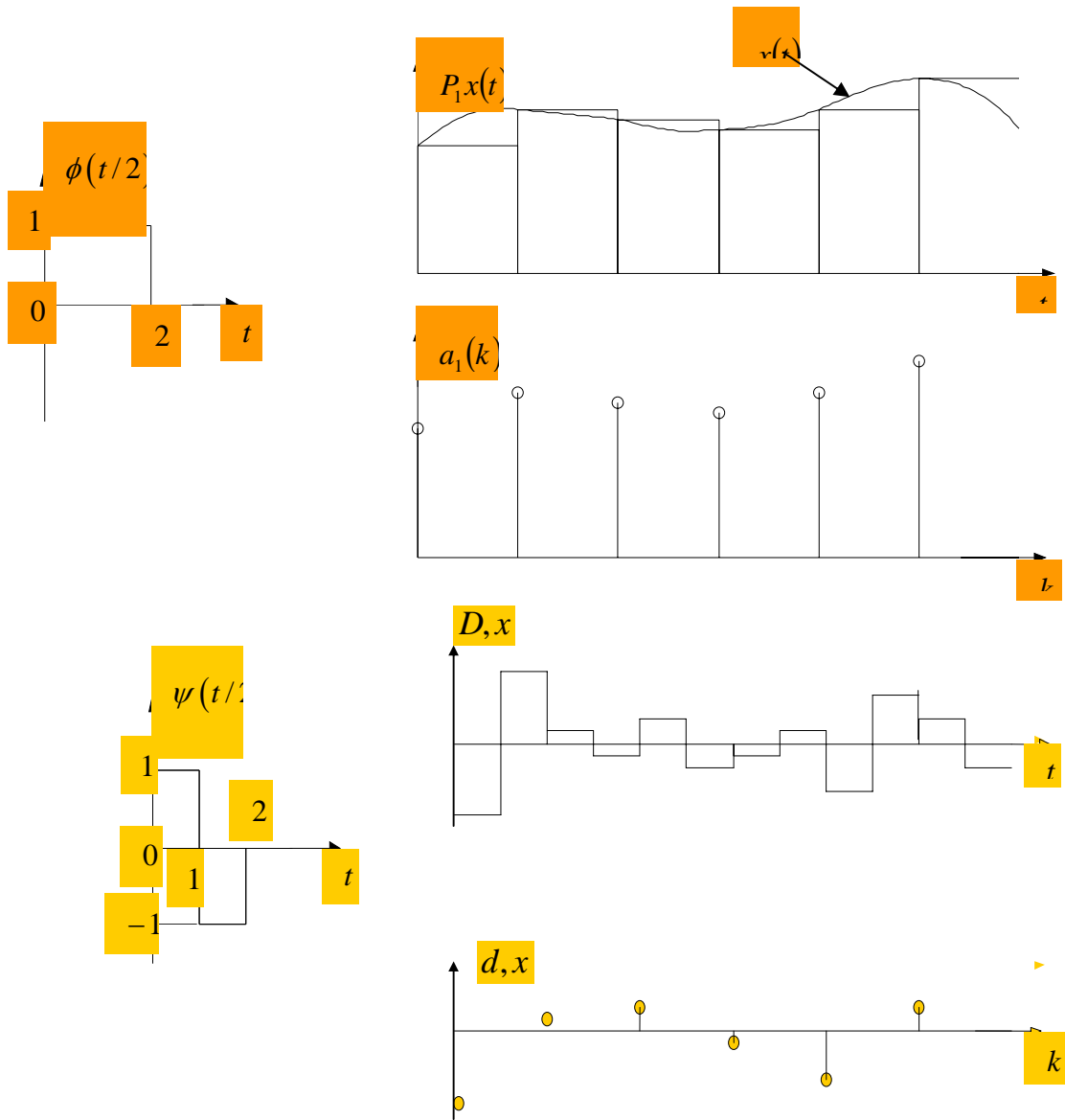


图 4.1.1 信号  $x(t)$  的近似

式中 $\oplus$ 表示直和。这说明， $W_1$ 是 $V_1$ 的正交外空间，并有 $V_1 \subset V_0$ ， $W_1 \subset V_0$ 。我们把上述概念加以推广，显然有

$$\begin{aligned} V_0 &= V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 \\ &= \cdots V_j \oplus W_j \oplus W_{j-1} \cdots \oplus W_1 \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

并且

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_j \supset V_{j+1} \cdots \quad (4.1.20)$$

总结：给定不同的分辨率水平  $j$ ，我们可得到  $x(t)$  在该分辨率水平上的近似  $P_j x(t)$  和  $D_j x(t)$ ，由于  $\phi(t)$  是低通信号，因此  $P_j x(t)$  反映了  $x(t)$  的低通成份，我们称其为  $x(t)$  的“概貌”。由于  $a_j(k)$  是由  $P_j x(t)$  边缘得到的离散序列，所以  $a_j(k)$  也应是  $x(t)$  在尺度  $j$  下的概貌，或称离散近似。同理，由于  $\psi(t)$  是带通信号，因此  $D_j x(t)$  反映的是的高频成份，或称为  $x(t)$  的“细节”，而  $d_j(k)$  是  $x(t)$  的离散细节。

在以上的分析中，我们同时使用了两个函数，即  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$ ，并由它们的伸缩与移位形成了在不同尺度下的正交基。由后面的讨论可知，对  $x(t)$  作概貌近似的函数  $\phi(t)$  称为“尺度函数”，而对  $x(t)$  作细节近似的函数  $\psi(t)$  称为小波函数。读者不难发现，图 4.1.1(d) 中的  $\psi(t)$  即是我们在上一章提到的 Haar 小波。图(a)中的  $\phi(t)$  即是 Haar 小波在  $j=0$  时的尺度函数。



## 4.1.2 树结构理想滤波器组

一个离散时间信号  $x(n)$  经过一个两通道滤波器组后， $H_0(z)$  的输出为其低频部分，频带在  $0 \sim \pi/2$ ； $H_1(z)$  的输出为其高频部分，频带为  $\pi/2 \sim \pi$ 。由于  $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$  输出后的信号频带均比  $x(n)$  的频带降低了一倍，因此，在  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的输出后都各带一个二抽取环节，如图 4.1.2 所示。

如果我们把  $x(n)$  的总频带 ( $0 \sim \pi$ ) 定义为空间  $V_0$ ，经第一次分解后， $V_0$  被分成两个子空间，一个是低频段的  $V_1$ ，其频率范围为  $0 \sim \pi/2$ ；另一个是高频段的  $W_1$ ，其频带在  $\pi/2 \sim \pi$  之间。显然， $V_0 = V_1 \oplus W_1$ ，并且  $V_1$  和  $W_1$  是正交的，即二者的交集为空间  $V_0$ （此亦是直和的定义）。按此思路，我们可在  $H_0(z)$  的输出后再接一个两通道分析滤波器组，这样就将空间  $V_1$  进一步剖分，一个是高频段的空间  $W_2$  ( $\pi/4 \sim \pi/2$ )，另一个是低频段的空间  $V_2$  ( $0 \sim \pi/4$ )，如图 4.1.2(a) 和 (b) 所示。

由上面的分解不难发现，

$$V_0 = V_1 \oplus W_1, \quad V_1 = V_2 \oplus W_2, \dots, V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (4.1.21a)$$

及 
$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_j \oplus V_j \quad (4.1.21b)$$

或 
$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \dots \supset V_j \quad (4.1.21c)$$

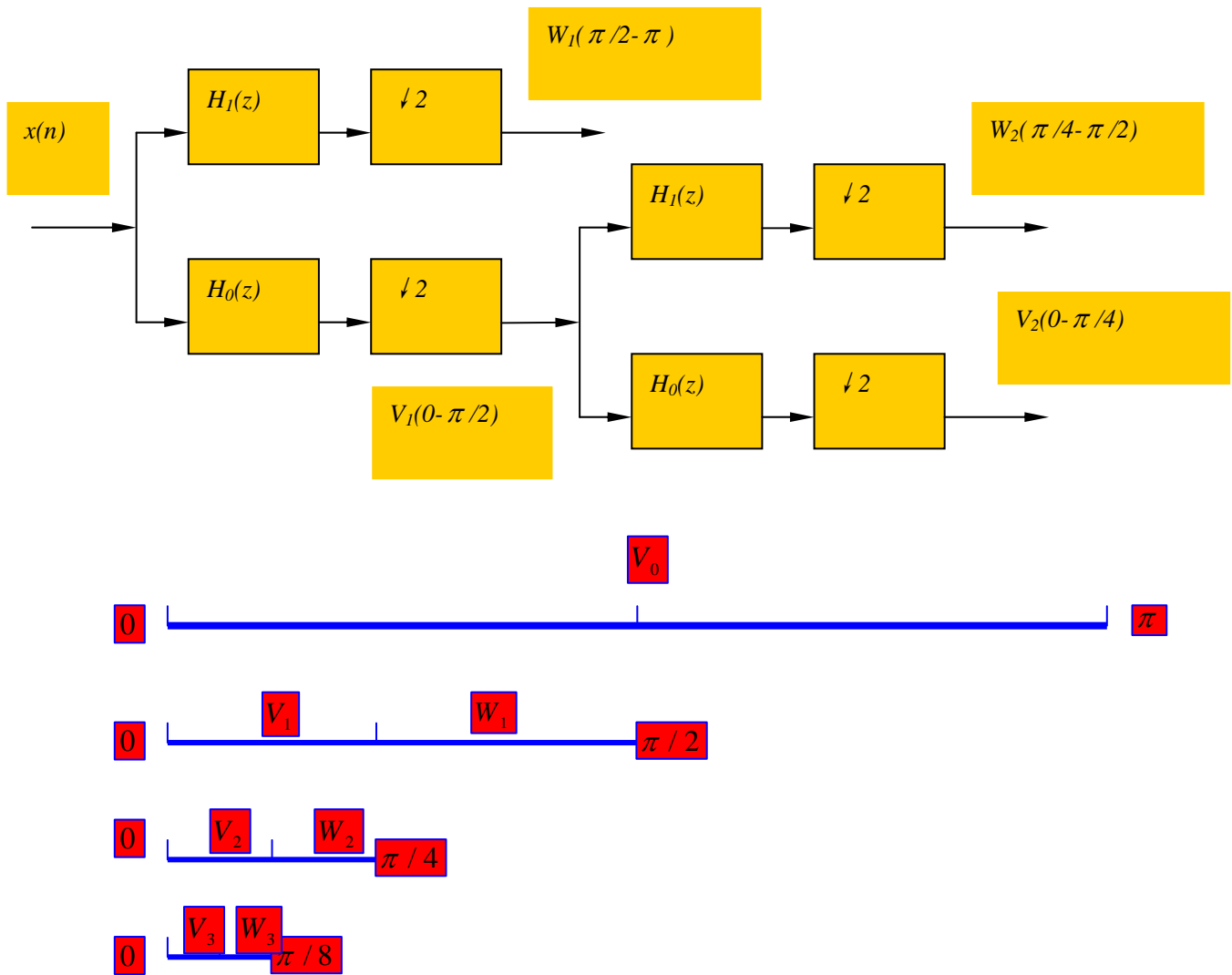


图 4.1.2 基于滤波器组的频带剖分 (a) 滤波器组, (b) 频带剖分

现在我们来分析一下图 4.1.2 对信号分解的特点。

### 1. 各带通空间 $W_j$ 和各低通空间 $V_j$ 的恒 Q 性

先看带通空间。由图 4.1.2(b)， $W_1$  的带宽为  $\pi/2$ ，中心频率为  $3\pi/4$ ，其  $Q = \frac{\pi}{2} / \frac{3\pi}{4} = 2/3$ ； $W_2$  的带宽为  $\pi/4$ ，中心频率在  $3\pi/8$ ，所以其  $Q$  也是  $2/3$ ，同理， $W_3, W_4$  的  $Q$  均是  $2/3$ ；

再看低通空间  $V_j$ ，很明显， $V_0$  的  $Q = \pi / \frac{\pi}{2} = 2$ ， $V_1$  的  $Q = \frac{\pi}{2} / \frac{\pi}{4} = 2$ ， $V_2$  的  $Q = \frac{\pi}{4} / \frac{\pi}{8} = 2, \dots, V_j$  的  $Q$  也是 2。

### 2. 各级滤波器的一致性

在图 4.1.2(a) 中，我们将各级滤波器组的低通和高通滤波器都写成了  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$ ，这意味着各级滤波器组使用的是同一组滤波器，这一方面体现了树状滤波器组中各级滤波器的一致性，也深刻体现了上述空间剖分的特点，现对此作一简单的解释。

假定对  $x(n)$  的抽样频率  $f_s = 1000$  Hz，对  $H_0(z)$ ，设其截止频率  $f_p = 300$  Hz，也即  $\omega_p = 0.6\pi$ ，或归一化频率  $f'_p = 0.3$ ；对第二级，由于前一级有一二抽取环节，致使  $f_s$  变成了 500 Hz，同时，由于第一级的输出使频带减少一半，故第二级低通滤波器的  $f_p$  应改为 150 Hz。但是，这时的  $\omega_p$  仍为  $0.6\pi$ ，即  $\omega_p = 2\pi \times 150 / 500$ ，依次类推，各级的  $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$  均保持不变。这样，只要设计出第一级的  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$ ，以后各级的滤波器均可采用它们。

## 4.2 多分辨率分析的定义

Mallat 给出了多分辨率分析的定义：

设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  空间中的一系列闭合子空间，如果它们满足如下六个性质，则说  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是一个多分辨率近似。这六个性质是：

$$1. \quad \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \text{ 若 } x(t) \in V_j \text{ 则 } x(t - 2^j k) \in V_j \quad (4.2.1)$$

$$2. \quad \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \supset V_{j+1}, \text{ 即} \\ \cdots V_0 \supset V_1 \supset V_2 \cdots V_j \supset V_{j+1} \cdots \quad (4.2.2)$$

$$3. \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \text{ 若 } x(t) \in V_j, \text{ 则 } x\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (4.2.3)$$

$$4. \quad \text{Lim}_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad (4.2.4)$$

$$5. \quad \text{Lim}_{j \rightarrow \infty} V_j = \text{Closure}\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}) \quad (4.2.5)$$

6. 存在一个基本函数  $\theta(t)$ ，使得  $\{\theta(t - k)\}$ ， $k \in \mathbb{Z}$  是  $V_0$  中的 Riesz 基。

现对以上性质作一些直观的解释：

**性质 1 说明**，空间  $V_j$  对于正比于尺度  $2^j$  的位移具有不变性，也即函数的时移不改变其所属的空间。我们在上一章对  $(a, b)$  作二进制离散化时曾说明，若令  $a = 2^j$ ，则  $b$  应取  $b = 2^j k b_0$ ，将  $b_0$  归一化为 1，则

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = a^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) = \psi_{j,k}(t) \quad (4.2.6)$$

所以，(4.2.1) 式实际上应等效为：

$$\forall j \in Z, \text{ 若 } x(t) \in V_j, \text{ 则 } x(t-k) \in V_j \quad (4.2.7)$$

这是因为  $\forall j \in Z$ ，必有  $2^j \in Z$ ；

**性质 2 说明**，在尺度  $2^j$  (或  $j$ ) 时，对  $x(t)$  作的是分辨率为  $2^{-j}$  的近似，其结果将包含在较低一级分辨率  $2^{-j-1}$  时对  $x(t)$  近似的所有信息，此即空间的包含，也即 (4.2.2) 式；

**性质 3 是性质 2 的直接结果**。在  $V_{j+1}$  中，函数作了二倍的扩展，分辨率降为  $2^{-j-1}$ ，所以  $x(\frac{t}{2})$  应属于  $V_{j+1}$ ；

**性质 4 说明**，当  $j \rightarrow \infty$  时，分辨率  $2^{-j} \rightarrow 0$ ，这时我们将会失  $x(t)$  的所有信息，也即

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j x(t) = 0$$

从空间上讲，所有  $V_j (j = -\infty \sim +\infty)$  的交集为零空间；

**性质 5 是性质 4 的另一面**，即当  $j \rightarrow -\infty$  时，分辨率  $2^{-j} \rightarrow \infty$ ，那么信号  $x(t)$  在该尺度下的近似将收敛于它自身，即

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} |P_j x(t) - x(t)| = 0 \quad (4.2.8)$$

从空间上讲，即是所有  $V_j (j = -\infty \sim +\infty)$  的并集收敛于整个  $L^2(R)$  空间；

**性质 6 说明了  $V_0$  中 Riesz 基的存在性问题**，并将要由此引出  $V_0, V_1, \dots, V_j$  中正交基的存在性问题。

**Riesz 基的存在性问题的解释:**

设  $V_0$  是一 Hilbert 空间 (注: 能量有限的空间  $L^2(\mathbb{R})$  即是 Hilbert 空间),  $\{\theta_k = \theta(t-k)\}, k \in \mathbb{Z}$  是  $V_0$  中的一组向量, 其个数与  $V_0$  的维数一致。自然,  $V_0$  中的任一元素  $x$  都可表为  $\theta_k$  的线性组合, 即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \theta(t-k) \quad (4.2.9)$$

若

(1)  $\{\theta_k = \theta(t-k)\}, k \in \mathbb{Z}$  之间是线性无关的, 且

(2) 存在常数  $0 < A \leq B < \infty$  使得

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (4.2.10)$$

则  $\theta(t-k), k \in \mathbb{Z}$  是  $V_0$  中的 Riesz 基。

注意, (4.2.10) 式等效于 (9.8.32) 式, 只不过在 (4.2.10) 式中  $j=0$ , Riesz 基本身是一个标架, 但它比标架的要求要高, 即  $\theta_k$  之间是线性无关的, 但它又比正交基要求低, 即并不要求  $\theta_k$  之间一定要两两正交。(4.2.10) 式的能量约束关系保证了 (4.2.9) 式对  $x(t)$  表示的数值稳定性。

下述定理给出了在  $V_0$  中存在 Riesz 基的充要条件。

**定理 4.1**  $\theta(t-k), k \in \mathbb{Z}$  是  $V_0$  中的 Riesz 基的充要条件是存在常数  $A > 0, B > 0$

使得

$$\forall \Omega \in [-\pi, \pi], \text{ 有 } \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A} \quad (4.2.11)$$

式中  $\hat{\theta}(\Omega)$  是  $\theta(t)$  的傅里叶变换。

证明：对任意的  $x(t) \in V_0$ ，我们均可按 (4.2.9) 式对  $x(t)$  作分解。现对 (4.2.9) 两边作傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \theta(t-k) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \hat{\theta}(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\Omega k} \end{aligned}$$

(4.2.12)

这是我们在 (1.7.14) 及 (1.7.15) 式所遇到的 FT 和 DTFT 混合的形式。若设想  $c_k$  的实际间隔为  $T_s$ ，由  $\omega = \Omega T_s$  <sup>[19]</sup>，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\Omega T_s k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega k} = C(e^{j\omega}) \quad (4.2.13)$$

应是周期的，周期为  $2\pi$ ，为了书写的方便，我们暂把  $C(e^{j\omega})$  记作  $C(\Omega)$ ，这样，(4.2.12) 式变成

$$X(\Omega) = \hat{\theta}(\Omega) C(\Omega) \quad (4.2.14)$$

于是， $x(t)$  的范数

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(\Omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

注意式中  $\hat{\theta}(\Omega)$  的  $\Omega$  应从  $-\infty \sim +\infty$ ，上式中的分段积分及对  $k$  的求和保证了这一点。

(4.2.10) 式所要求的 Riesz 基的条件进一步可表为：

$$A\|x\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (4.2.16)$$

若  $\{\theta_k = \theta(t-k)\}, k \in Z$  是  $V_0$  中的 Riesz 基, 则 (4.2.16) 式必须成立。为保证 (4.2.16) 式成立, 由 (4.2.15) 式, 由于  $x(t) \in L^2(R)$ , 即  $x(t)$  的能量是有界的, 因此  $\hat{\theta}(\Omega)$  必须满足 (4.2.11) 式。因此必要性保证。

反之, 若 (4.2.11) 式成立, 则由 (4.2.15) 式必然可导出 (4.2.16) 式。此外, 凡满足 (4.2.9) 式的  $c_k$ , 它必然满足 (4.2.16) 式。若  $x(t)=0$ , 则必有  $c_k=0$ , 对所有的  $k$ , 因此,  $\{\theta_k = \theta(t-k)\}, k \in Z$  是线性无关的。由此, 充分性保证。于是定理得证。

在实际工作中, 人们总是偏爱正交基。下述定理给出了如何由 Riesz 基构造正交基的方法。

**定理 4.2** 令  $\{V_j\}, j \in Z$  是一多分辨分析,  $\phi(t)$  是一尺度函数, 若其傅里叶变换可由下式给出:

$$\Phi(\Omega) = \frac{\hat{\theta}(\Omega)}{\left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 \right]^{1/2}} \quad (4.2.17)$$

并令

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \quad (4.2.18)$$

则  $\phi_{j,k}(t)$  是  $V_j$  中的正交归一基, 对所有的  $j \in Z$ 。式中  $\hat{\theta}(\Omega)$  是产生 Riesz 基的基本函数  $\theta(t)$  的傅里叶变换。

**证明:** 为了构造一个正交基, 我们需要寻找一个基本函数  $\phi(t)$ , 由 (4.2.18) 式的定



义,  $\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$  必然属于  $V_0$ , 由定理 4.1,  $\phi(t)$  也可表为 Riesz 基  $\theta(t-k)$  的线性组合, 即

$$\phi(t) = \sum_k c_k \theta(t-k) \quad (4.2.19)$$

由 (4.2.14) 式, 上式对应的频域关系是:

$$\Phi(\Omega) = \hat{\theta}(\Omega)C(\Omega) \quad (4.2.20)$$

式中  $C(\Omega)$  是  $c_k$  的 DTFT, 因此, 它仍是周期的, 周期为  $2\pi$ 。

如果,  $\phi(t-k), j \in Z$  是  $V_0$  中的正交归一基, 由 1.7 节关于正交基的性质, 有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\Omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (4.2.21)$$

将 (4.2.20) 式代入 (4.2.21) 式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)C(\Omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 |C(\Omega + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C(\Omega)|^2 |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 \\ &= |C(\Omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2 = 1 \end{aligned}$$

由 Riesz 基的性质,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2$  是有界的, 因此, 有

$$|C(\Omega)|^2 = \frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\Omega + 2k\pi)|^2}$$

即

$$C(\Omega) = \frac{1}{\left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\theta}(\Omega + 2k\pi) \right|^2 \right]^{1/2}} \quad (4.2.22)$$

将该式代入 (4.2.20) 式, 即得 (4.2.17) 式。因此,  $\phi(t-k), j \in Z$  是  $V_0$  中的正交归一基。

(4.1.12) 和 (4.1.13) 式已证明, 若  $\phi(t-k), j \in Z$  是正交归一基,  $\phi(t)$  按 (4.2.18) 式作二进制伸缩与位移所产生的  $\phi_{j,k}(t)$  对所有的  $j$ , 都是相应  $V_j$  中的正交归一基。于是定理得证。

由半正交小波求正交小波的方法, 其原理和定理 4.2 是一样的。这样, 定理 4.1 给出了  $V_0$  空间中 Riesz 基的存在性, 定理 4.2 给出了由 Riesz 基过渡到正交基的方法。在实际工作中, 找到一个正交归一的基函数  $\{\phi(t-k)\}, k \in Z$  并不太容易, 但找到一组 Riesz 基  $\{\theta(t-k)\}, k \in Z$  却比较容易。具体步骤是:

1. 由  $\theta(t)$  作 FT 得  $\hat{\theta}(\Omega)$ ;
2. 由 (4.2.17) 式求  $\Phi(\Omega)$ ;
3. 由  $\Phi(\Omega)$  作逆傅里叶变格得  $\phi(t)$ , 则  $\{\phi(t-k)\}, k \in Z$  即是一组正交基。

文献[5]和文献[21]介绍了利用此方法构造 Battle-Lemarie 小波的例子。其思路是令  $\theta(t)$  为一个三角波, 其傅里叶变换为

$$\hat{\theta}(\Omega) = \frac{4}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

(4.2.23)

可以证明,  $\{\theta(t-k)\}, k \in Z$  构成一组 Riesz 基, 但是,  $\theta(t-k)$  之间并不正交, 可以求出:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\theta}(\Omega + 2k\pi) \right|^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cos^2 \frac{\Omega}{2} \right) \quad (4.2.24)$$

显然,  $\hat{\theta}(\Omega)$  是有界的, 满足(4.2.11)式所要求的 Riesz 基的频域条件。按(4.2.17)式, 可以求出

$$\Phi(\Omega) = \sqrt{3} \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\Omega}{2} \right)}{\Omega^2 \left( 1 + 2 \cos^2 \frac{\Omega}{2} \right)^{1/2}} \quad (4.2.25)$$

由  $\Phi(\Omega)$  作反变换即可得到  $\phi(t)$ 。  $\{\phi(t-k)\}, k \in Z$  即可构成一组正交基。

## 4.3 空间 $V_j$ 、 $W_j$ 中信号的分解

由上两节关于频率轴剖分的思想， $\phi(t)$  应是  $V_0$  中的低通函数， $\psi(t)$  应是  $W_0$  中的带通函数。将  $\phi(t)$  归一化，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (4.3.1)$$

定理 4.2 已指出， $\{\phi(t-k), k \in Z\}$  是  $V_0$  中的正交归一基， $\{\phi_{j,k}(t), j, k \in Z^2\}$  是  $V_j$  中的正交归一基。这样，我们可将  $x(t) \in L^2(R)$  按此基函数逐级进行分解。

### 1. 子空间 $V_0$

令  $P_0 x(t)$  是在  $V_0$  中的投影，则

$$P_0 x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_0(k) \phi(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_0(k) \phi_{0,k}(t) \quad (4.3.2)$$

式中  $a_0(k)$  是加权系数，它应是一个离散序列。由  $\phi(t-k)$  的正交性质，我们有

$$a_0(k) = \langle P_0 x(t), \phi_{0,k}(t) \rangle$$

由图 4.1.1 (b)， $\phi_{0,k}(t)$  和  $P_0 x(t)$  作内积实质上是  $\phi_{0,k}(t)$  和  $x(t)$  作内积，即

$$a_0(k) = \langle x(t), \phi_{0,k}(t) \rangle \quad (4.3.3)$$

这样

$$P_0 x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x(t), \phi_{0,k}(t) \rangle \phi_{0,k}(t) \quad (4.3.4)$$

这是我们已经很熟悉的信号分解的表示形式。由于  $P_0 x(t)$  是时间  $t$  的函数，而  $\phi(t-k)$  又具有低通性质，因此我们称  $P_0 x(t)$  是  $x(t)$  在  $V_0$  中的“分段平滑”逼近，而称  $a_0(k)$  为  $x(t)$  在  $V_0$

中的“离散”逼近。它们都是  $x(t)$  在分辨率  $j=0$  时的“概貌”。

## 2. 子空间 $V_1$

由多分辨分析的定义，若  $\phi(t) \in V_0$ ，则  $\phi(\frac{t}{2}) \in V_1$ ，由定理 4.2， $\phi_{1,k}(t) = 2^{-1/2} \phi(2^{-1}t - k)$  是  $V_1$  中的正交归一基。仿照 (4.3.2) ~ (4.3.4) 式，我们有

$$P_1 x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k) \phi_{1,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_1(k) \phi(2^{-1}t - k) \quad (4.3.5)$$

$$a_1(k) = \langle P_1 x(t), \phi_{1,k}(t) \rangle = \langle x(t), \phi_{1,k}(t) \rangle \quad (4.3.6)$$

及

$$P_1 x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x(t), \phi_{1,k}(t) \rangle \phi_{1,k}(t) \quad (4.3.7)$$

## 3. 子空间 $W_1$

若我们在子空间  $W_0$  中能找到一个带通函数  $\psi(t)$ ，使  $\{\psi(t-k), k \in Z\}$  是  $W_0$  中的正交归一基，类似尺度函数  $\phi(t)$ ，因  $\psi(t) \in W_0$ ，则  $\psi(\frac{t}{2}) \in W_1$ ，

$\psi_{1,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(2^{-1}t - k)$  也可构成  $W_1$  中的正交归一基，即

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\langle \psi_{1,k}(t), \psi_{1,k'}(t) \rangle = \delta(k - k') \quad (4.3.9)$$

依次类推， $\psi_{j,k}(t)$  将是  $W_j$  中的正交归一基。我们称  $\psi(t)$  为小波函数，满足上述正交归一性质的正交小波的构造问题将在下一章详细讨论。这样，我们可依次将  $x(t)$  在  $W_j$  中作类似在  $V_j$  各空间中的分解。

令

$$D_1 x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_1(k) \psi_{1,k}(t) \quad (4.3.10)$$

则

$$d_1(k) = \langle D_1 x(t), \psi_{1,k}(t) \rangle = \langle x(t), \psi_{1,k}(t) \rangle \quad (4.3.11)$$

我们在 4.1 节中已述及,  $D_1 x(t)$  是  $x(t)$  在子空间  $W_1$  上的投影, 它是时间  $t$  的函数。因为  $\psi(t)$  是带通函数, 所以  $D_1 x(t)$  是  $x(t)$  的分为连续细节逼近。同理,  $d_1(k)$  是  $x(t)$  在  $W_1$  中的离散细节。由于  $V_0 = V_1 \oplus W_1$ , 所以必

$$P_0 x(t) = P_1 x(t) + D_1 x(t) \quad (4.3.12)$$

或

$$D_1 x(t) = P_0 x(t) - P_1 x(t) \quad (4.3.13)$$

这两个式子指出,  $x(t)$  在  $W_1$  中的投影等于  $x(t)$  分别在  $V_0$  和  $V_1$  中的投影的差, 它也是在  $j=0$  和  $j=1$  这两个分辨率水平上的逼近之差, 因此,  $D_1 x(t)$  和  $d_1(k)$  均被称为  $x(t)$  的“细节”。实际上, 它们反映的也是  $x(t)$  的高频成份, 且  $d_1(k)$  就是尺度  $a=2^j$  时的离散栅格上的小波变换。

#### 4. 对子空间 $V_j, W_j$

将上述的讨论加以推广, 自然有如下的结论:

$$P_j x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j(k) \phi_{j,k}(t) \quad (4.3.14)$$

$$a_j(k) = \langle x(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \quad (4.3.15)$$

$$D_j x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t) \quad (4.3.16)$$

$$d_j(k) = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (4.3.17)$$

$$P_{j-1}x(t) = P_jx(t) + D_jx(t) \quad (4.3.18)$$

一般，令  $j=1 \sim \infty$ ，我们可依次实现对  $x(t)$  的多分辨率分析。

下面，我们将深入地探讨这种分解的内在联系。

## 4.4 二尺度差分方程

前已指出， $\phi_{j,k}(t)$  是  $V_j$  中的正交归一基， $\psi_{j,k}(t)$  是  $W_j$  中的正交归一基，并且  $V_j \perp W_j$ ， $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ 。这一关系启发我们，在相邻尺度（如  $j$  和  $j-1$ ）下的尺度函数和尺度函数之间、尺度函数和小波函数之间必然存在着一定的联系。

由于  $\phi_{j,0}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t) \in V_j$ ，而  $V_j$  包含在  $V_{j-1}$  中，这样，把  $\phi_{j,0}(t)$  设想成是  $V_{j-1}$  中的一个元素，因此它当然可以表为  $V_{j-1}$  中正交基的线性组合，即

$$\phi_{j,0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi_{j-1,k}(t)$$

式中  $h_0(k)$  是加权系数，它是一个离散序列。将上式进一步展开，有

$$2^{-j/2} \phi(2^{-j}t) = 2^{-(j-1)/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi(2^{-(j-1)}t - k)$$

即

$$\phi\left(\frac{t}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi\left(\frac{t}{2^{j-1}} - k\right) \quad (4.4.1)$$

同理，由于  $W_j$  也包含在  $V_{j-1}$  中，因此， $W_j$  中的  $\psi_{j,0}(t)$  也可表为  $V_{j-1}$  中正交基  $\phi_{j-1,k}(t)$  的线性组合，即

$$\psi\left(\frac{t}{2^j}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) \phi\left(\frac{t}{2^{j-1}} - k\right) \quad (4.4.2)$$

$h_1(k)$  也是加权系数。(4.4.1) 和 (4.4.2) 两式被称为“二尺度差分方程”<sup>[53]</sup>，它们揭示了在多分辨率分析中尺度函数和小波函数的相互关系。这一关系存在于任意相邻的两级之间，如  $j=1$ ，有

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi(t - k) \quad (4.4.3a)$$

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) \phi(t - k) \quad (4.4.3b)$$

该式又等效于

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi(2t - k) \quad (4.4.4a)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) \phi(2t - k) \quad (4.4.4b)$$

因此，二尺度差分方程是多分辨率分析中小波函数和尺度函数的一个重要性质。

由  $\phi_{j,k}$  和  $\psi_{j,k}$  各自的正交性， $h_0(k)$ ， $h_1(k)$  可由下式求得：

$$\begin{aligned} h_0(k) &= \langle \phi_{j,0}(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^j 2^{j-1}}} \int \phi\left(\frac{t}{2^j}\right) \phi^*\left(\frac{t}{2^{j-1}} - k\right) dt \end{aligned}$$

令  $\frac{t}{2^{j-1}} = t'$ ，则



$$h_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi\left(\frac{t'}{2}\right) \phi^*(t' - k) dt'$$

或

$$h_0(k) = \langle \phi_{1,0}(t), \phi_{0,k}(t) \rangle \quad (4.4.5)$$

$$h_1(k) = \langle \psi_{1,0}(t), \phi_{0,k}(t) \rangle \quad (4.4.6)$$

同理总结：这两个式子揭示了一个重要得关系，即  $h_0(k)$  和  $h_1(k)$  与  $j$  无关，它对任意两个相邻级中的  $\phi$  和  $\psi$  的关系都适用。这就是说，由  $j = 0$  和  $j = 1$  的二尺度差分方程求出的  $h_0(k)$  和  $h_1(k)$  适用于  $j$  取任何整数时的二尺度差分方程。由至，可能会想到， $h_0(k)$  和  $h_1(k)$  类似于图 4.1.2(a) 中的两通道滤波器组， $h_0(k)$  对应低通滤波器  $H_0(z)$ ， $h_1(k)$  对应高通滤波器  $H_1(z)$ ，且在每一级， $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  保证不变。如果这一设想是正确的，那么就把小波变换和滤波器组联系了起来。当然，实际情况也正是如此。

现在再回过头来观察图 4.1.1，显然有：

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{t}{2}\right) &= \phi(t) + \phi(t-1) = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t-1)\right] \\ \psi\left(\frac{t}{2}\right) &= \phi(t) - \phi(t-1) = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t-1)\right]\end{aligned}$$

对比 (4.4.3) 和 (4.4.4) 式，有

$$h_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_0(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

这是 Haar 小波及其尺度函数所对应的滤波器的系数。

现在我们来研究二尺度差分方程在频域中表示形式。对 (4.4.3) 式两边取傅里叶变换，有

$$\int \phi\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\Omega t} dt = \sqrt{2} \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \phi(t-k) e^{-j\Omega t} dt$$

该式是我们在前面多次遇到过的 FT 和 DTFT 的混合表示形式，式中  $\phi(t-k)$  是  $\phi(t)$  在  $b$  轴上离散取值所得到的，假定对  $b$  轴的抽样间隔为  $T_s$ ，则上式积分的

$$\text{左边} = 2\Phi(2\Omega)$$

$$\begin{aligned}\text{右边} &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \int \phi(t-kT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) e^{-jk\Omega T_s} \Phi(\Omega) \\ &= \sqrt{2} H_0(e^{j\omega}) \Phi(\Omega)\end{aligned}$$

式中  $\omega = \Omega T_s$ ， $\Omega$  是相对连续信号的角频率， $\Omega = 2\pi f$ ，而  $\omega$  是相对离散信号的圆频率。由于

后面的讨论以离散信号和离散系统为主，所以，我们将 $\Omega, \omega$ 都记为 $\omega$ ，并将 $e^{j\omega}$ 简记为 $\omega$ 。

这样，最后有

$$\sqrt{2}\Phi(2\omega) = H_0(\omega)\Phi(\omega) \quad (4.4.7)$$

同理，有

$$\sqrt{2}\Psi(2\omega) = H_1(\omega)\Phi(\omega) \quad (4.4.8)$$

请记住， $\Phi(\omega)$ 、 $\Phi(2\omega)$ 和 $\Psi(2\omega)$ 都是连续信号的傅里叶变换（FT），而 $H_0(\omega)$ 、 $H_1(\omega)$ 是离散信号的傅里叶变换（DTFT）。

将(4.4.3)和(4.4.4)两式的两边分别对 $t$ 积分，由于 $\int \phi(t)dt = 1$ ， $\int \psi(t)dt = 0$ ，所以，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) = \sqrt{2} \quad (4.4.9)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) = 0 \quad (4.4.10)$$

对应于频域，有

$$H_0(\omega)|_{\omega=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) = \sqrt{2} \quad (4.4.11)$$

$$H_1(\omega)|_{\omega=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) = 0 \quad (4.4.12)$$

因此， $H_0(z)$ 应是低通滤波器， $H_1(z)$ 应是高通滤波器。

由(4.4.7)式，有

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{8}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{8}\right) = \dots \\
&= \prod_{j=1}^J \frac{H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \tag{4.4.13}
\end{aligned}$$

由于当  $J \rightarrow \infty$  时,  $\Phi\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \Phi(0) = 1$ , 因此

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{H_0(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} = \prod_{j=1}^{\infty} H'_0(2^{-j}\omega) \tag{4.4.14}$$

式中  $H'_0(2^{-j}\omega) = H_0(2^{-j}\omega)/\sqrt{2}$ . 同理可由 (4.4.8) 式求出:

$$\begin{aligned}
\Psi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} \frac{H_0(2^{-j}\omega)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

即

$$\Psi(\omega) = H'_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} H'_0(2^{-j}\omega) \tag{4.4.15}$$

式中  $H'_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = H_1\left(\frac{\omega}{2}\right)/\sqrt{2}$ . 这样, (4.4.14) 和 (4.4.15) 式建立了  $H_0(\omega)$ ,  $H_1(\omega)$  分别和  $\Phi(\omega)$  和  $\Psi(\omega)$  的直接关系。若  $H_0(z)$ ,  $H_1(z)$  已知, 我们可由它们求出相应的  $\Phi(\omega)$  和  $\Psi(\omega)$ , 进一步求出相应的  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$ 。

例如，若  $H_0(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{\sqrt{2}}$ ，即  $H'_0(\omega) = e^{-j\omega}$ ，则

$$\Phi(\omega) = \prod_{l=1}^{\infty} e^{-j\omega/2^l} = e^{-j[\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4} + \dots]} = e^{-j\omega} \quad (4.4.16)$$

若  $H_0(\omega) = \cos \omega / \sqrt{2}$ ，即  $H'_0(\omega) = \cos \omega$ ，则

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j}\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} [\cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{4} \dots \cos \frac{\omega}{2^j}] = \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (4.4.17)$$

此外，由于  $V_0 = W_1 \oplus W_2 \dots \oplus W_j \oplus V_j$ ，且当  $j \rightarrow \infty$  时  $V_j = \{0\}$

因此，从能量守恒的角度，有

$$|\Phi(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\Psi(2^j \omega)|^2 \quad (4.4.18)$$

或

$$|\Phi(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^J |\Psi(2^j \omega)|^2 + |\Phi(2^J \omega)|^2 \quad (4.4.19)$$

## 4.5 二尺度差分方程与共轭正交滤波器组

(4.4.7)和(4.4.8)式给出了二尺度差分方程的频域关系。在此基础上，我们可导出在二尺度差分方程中 $h_0(k)$ 和 $h_1(k)$ 的频域关系，从而把多分辨率分析和滤波器组结合起来。

**定理 4.3** 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 分别是多分辨率分析中的尺度函数和小波函数， $h_0(k)$ ,  $h_1(k)$ 分别是满足二尺度差分方程(4.4.3)和(4.4.4)式的滤波器系数，则

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (4.5.1a)$$

$$|H_1(\omega)|^2 + |H_1(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (4.5.1b)$$

$$H_0(\omega)H_1^*(\omega) + H_0(\omega + \pi)H_1^*(\omega + \pi) = 0 \quad (4.5.1c)$$

证明：先证明(4.5.1a)式。由(4.4.7)式，有

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.5.2)$$

由于 $\phi(t-k)$ 是 $V_0$ 中的正交归一基，所以，其傅里叶变换满足(1.7.11)式，于是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \Phi(\omega + 2k\pi) \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H_0\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \right|^2 = 1$$

即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 = 2$$

式中 $H_0(\omega)$ 实际上是 $H_0(e^{j\omega})$ ，它是以 $2\pi$ 为周期的。现将 $k$ 按奇、偶分开，即分别令 $k = 2p$

和  $k = 2p + 1$ ，于是，有

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi + \pi\right) \right|^2 = 2$$

令  $\frac{\omega}{2} = \omega'$ ，又有：

$$\left| H_0(\omega') \right|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \Phi(\omega' + 2p\pi) \right|^2 + \left| H_0(\omega' + \pi) \right|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \Phi(\omega' + 2p\pi + \pi) \right|^2 = 2$$

由 (1.7.11) 式， $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \Phi(\omega' + 2p\pi) \right|^2 = 1$ ，作了常数移位后， $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \Phi(\omega' + 2p\pi + \pi) \right|^2$  也必然等于 1。

因此

$$\left| H_0(\omega) \right|^2 + \left| H_0(\omega + \pi) \right|^2 = 2$$

即 (4.5.1a) 式得证。同理可证明 (4.5.1b) 式。

满足 (4.5.1a) 和 (4.5.1b) 的  $H_0(z)$  及  $H_1(z)$  分别都是功率互补的，二者是功率对称的。

现在证明 (4.5.1c) 式。由 (1.7.12) 式，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega + 2k\pi) \Psi^*(\omega + 2k\pi) = 0 \quad (4.5.3)$$

令  $\omega = 2\omega'$ ，则上式变成

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(2\omega' + 2k\pi) \Psi^*(2\omega' + 2k\pi) = 0$$

将二尺度差分方程的频域关系代入上式，有

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_0(\omega' + k\pi) \Phi(\omega' + k\pi) H_1^*(\omega + k\pi) \Phi^*(\omega + k\pi) = 0$$

再一次地将  $k$  按奇、偶分开，并注意到  $H_0(\omega)$ ,  $H_1(\omega)$  都是以为  $2\pi$  周期的，于是

$$\begin{aligned} & \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_0(\omega' + 2p\pi) \Phi(\omega' + 2p\pi) H_1^*(\omega' + 2p\pi) \Phi^*(\omega' + 2p\pi) \\ & + \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_0(\omega' + 2p\pi + \pi) \Phi(\omega' + 2p\pi + \pi) H_1^*(\omega' + 2p\pi + \pi) \Phi^*(\omega' + 2p\pi + \pi) = 0 \end{aligned}$$

即

$$H_0(\omega') H_1^*(\omega') \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega' + 2p\pi)|^2 + H_0(\omega' + \pi) H_1^*(\omega' + \pi) \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega' + 2p\pi + \pi)|^2 = 0$$

由 (4.5.1a) 式的证明过程，最后可得

$$H_0(\omega) H_1^*(\omega) + H_0(\omega + \pi) H_1^*(\omega + \pi) = 0$$

这样 (4.5.1c) 式得证。

将 (4.5.1) 式写成 Z 变换的形式，有

$$H_0(z) H_0(z^{-1}) + H_0(-z) H_0(-z^{-1}) = 2 \quad (4.5.4a)$$

$$H_1(z) H_1(z^{-1}) + H_1(-z) H_1(-z^{-1}) = 2 \quad (4.5.4b)$$

$$H_0(z) H_1(z^{-1}) + H_0(-z) H_1(-z^{-1}) = 0 \quad (4.5.4c)$$

将 (4.5.4a) 式和 (7.4.9b) 式相比较，我们立即发现，满足小波变换多分辨率分析中二尺度差分方程的  $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$  正是一对共轭正交滤波器组 (CQMFB)。这样，我们就把小波变换和滤波器组联系起来，从而为离散信号的小波变换的快速实现提供了有效的途径。

注意，满足 (4.5.1c) 式的  $H_0(\omega)$  和  $H_1(\omega)$  并不唯一，其中一个解是

$$H_1(\omega) = -e^{-j\omega} H_0^*(\omega + \pi) \quad (4.5.5a)$$



或

$$H_1(z) = -z^{-1}H_0(-z^{-1}) \quad (4.5.5b)$$

读者可自行验证，若  $H_1(\omega) = \pm ce^{\pm j\omega} H_0^*(\omega + \pi)$ ，都可满足 (4.5.1c) 式。

CQMFB 中  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的关系。由 (7.4.1) 式， $H_1(z) = -z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1})$ ，由 (7.4.3b) 式，则  $h_1(n) = (-1)^{n+1}h_0(N-1-n)$ ，现在若按 (4.5.5b) 式定义  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的关系，即令  $N=2$ ，且比 (7.4.1) 式多了一个负号。很容易验证 (4.5.5b) 式所对应的时域关系是：

$$h_1(k) = (-1)^k h_0(1-k) \quad (4.5.6)$$

至此，给出了一系列重要的概念，它们分别是：

1. 在  $V_0$  中总存在  $\theta(t)$ ，使  $\{\theta(t-k), k \in Z\}$  构成  $V_0$  中的 Riesz 基；
2. 定理 4.2 说明如何由 Riesz 基  $\theta(t-k)$  得到  $V_0$  中的正交归一基  $\phi(t)$ ，进而  $\phi_{j,k}$  是  $V_j$  中的正交归一基，即  $\phi(t)$  是尺度函数。
3. 把  $W_j$  视为  $V_j$  的正交补，并假定在  $W_0$  中存在小波函数  $\psi(t)$ ，使  $\{\psi(t-k), k \in Z\}$  是  $W_0$  中的正交归一基，进而  $\phi_{j,k}$  是  $W_j$  中的正交归一基；
4. 由于假定  $W_j \perp V_j$ ，所以假定  $\phi_{j,k}$  和  $\psi_{j,k}$  是正交的；
5. 按  $\phi_{j,k}$ ， $\psi_{j,k}$  分别对  $x(t)$  作分解，得到 (4.3.14) ~ (4.3.18) 式的分解（或投影）关系；
6. 由  $V_j \supset V_{j+1}$ ， $V_{j+1} \oplus W_{j+1} = V_j$  这一包含关系，得到了 (4.4.4) 式的二尺度差分方程；其频域关系如 (4.4.7) 和 (4.4.8) 式所示；
7. 由定理 4.3，满足二尺度差分方程的  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  恰是一对共轭正交滤波器组，

即它们满足 (4.5.1) 式。

按此思路，我们即可有效地实现信号  $x(t)$  的小波变换，这即是下一节要讨论的 Mallat 算法。在讨论这一算法之前，也许读者已经看到上述总结的第 3 条中， $W_j$  中正交基  $\psi_{j,k}(t)$  的存在性及  $\psi_{j,k}(t)$  和  $\phi_{j,k}(t)$  的正交关系并没得到证明，在这之前，对它们的认同还都是“假设”。下述两个定理回答了这一结论。

**定理 4.4** 令  $\{V_j\}$  是一多分辨率分析序列， $\phi_{j,k}(t)$  是  $V_j$  中的正交归一基，再令  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  是一对共轭正交滤波器组，记  $\psi(t)$  的傅里叶变换为  $\Psi(\omega)$ ，

$$\text{若} \quad \Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.5.7)$$

则存在基本小波函数  $\psi(t)$ ，使  $\{\psi(t-k), k \in Z\}$  是  $W_0$  中的正交归一基，进而， $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in Z\}$  是  $W_j$  中的正交归一基。

**证明：**定理 4.4 实际上是定理 4.3 的逆命题。若  $\{\psi(t-k), k \in Z\}$  构成  $W_0$  中的正交归一基，由 1.7 节关于正交基的性质，则必有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (4.5.8)$$

将 (4.5.7) 式的所给条件代入 (4.5.8) 式的左边，有

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega + 2k\pi)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H_1\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=2p}^{\infty} \left| H_1\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 \left| \Psi\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 + \sum_{k=2p+1}^{\infty} \left| H_1\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi + \pi\right) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

令  $\frac{\omega}{2} = \omega'$ ，考虑到  $H_1(\omega)$  是以  $2\pi$  为周期的， $\phi(t)$  是正交归一基，因此

$$\text{上式} = \frac{1}{2} [|H_1(\omega')|^2 + |H_1(\omega' + \pi)|^2]$$

因为  $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$  是一对共轭正交滤波器组，所以， $H_1(\omega)$  必满足 (4.5.1b) 式，因此 (4.5.8) 式得证，即  $\{\psi(t-k), k \in Z\}$  是  $W_0$  中的正交归一基。

由 (4.1.3) 式，可证  $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in Z\}$  是  $W_j$  中的正交归一基，因此定理得证。

**定理 4.5** 设  $\{V_j\}$  是一多分辨率分析序列， $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ， $\phi_{j,k}$  和  $\psi_{j,k}$  分别是  $V_j$  和  $W_j$  中的正交归一基，则  $\phi_{j,k}$  和  $\psi_{j,k}$  是正交的，即

$$\langle \phi_{j,k_1}, \psi_{j,k_2} \rangle = 0 \quad \forall k_1, k_2 \in Z \quad (4.5.9)$$

**证明：** 同样，由 1.7 节关于正交基的性质，若证明 (4.5.9) 式，只需证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega + 2k\pi) \Psi^*(\omega + 2k\pi) = 0 \quad (4.5.10)$$

即可

将  $\Phi(\omega) = H_0(\omega/2)\Phi(\omega/2)/\sqrt{2}$  及  $\Psi(\omega) = H_1(\omega/2)\Phi(\omega/2)/\sqrt{2}$  代入 (4.5.10) 式，再利用 (4.5.1c) 式有关正交滤波器组的关系，则 (4.5.10) 式可证。

## 4.6 Mallat 算法

在上述多分辨率分析的基础上，下述两个定理给出了如何通过滤波器组实现信号的小波变换及反变换。

**定理 4.6:** 令  $a_j(k)$ ,  $d_j(k)$  是多分辨率分析中的离散逼近系数,  $h_0(k)$ ,  $h_1(k)$  是满足 (4.4.3) 和 (4.4.4) 式的二尺度差分方程的两个滤波器, 则  $a_j(k)$ ,  $d_j(k)$  存在如下递推关系:

$$a_{j+1}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j(n)h_0(n-2k) = a_j(k) * \bar{h}_0(2k) \quad (4.6.1a)$$

$$d_{j+1}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j(n)h_1(n-2k) = a_j(k) * \bar{h}_1(2k) \quad (4.6.1b)$$

式中  $\bar{h}(k) = h(-k)$ 。

**证明:** 先证明 (4.6.1a) 式

由于正交基函数  $\phi_{j+1,k} \in V_{j+1}$ ,  $\phi_{j,k} \in V_j$ , 而  $V_{j+1} \subset V_j$ , 因此,  $\phi_{j+1,k}(t)$  可用正交基  $\phi_{j,n}(t)$  来作分解, 即

$$\phi_{j+1,k}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_{j,n}(t) \quad (4.6.2)$$

式中分解系数

$$\begin{aligned} c_n &= \langle \phi_{j+1,k}(t), \phi_{j,n}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}\sqrt{2^j}} \int \phi(2^{-(j+1)}t-k)\phi^*(2^{-j}t-n)dt \end{aligned}$$

令  $\frac{t'}{2} = 2^{-(j+1)}t - k$ ，则

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi\left(\frac{t}{2}\right) \phi^*(t' - n + 2k) dt' \\ &= \langle \phi_{1,0}(t), \phi_{0,n-2k}(t) \rangle \end{aligned}$$

由 (4.4.5) 式，有

$$\langle \phi_{1,0}(t), \phi_{0,n-2k}(t) \rangle = h_0(n - 2k) = c_n$$

于是，(4.6.2) 式变成

$$\phi_{j+1,k}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n - 2k) \phi_{j,n}(t) \quad (4.6.3)$$

将该式两边分别对  $x(t)$  作内积，由 (4.3.15) 式，有

$$\text{左边} = \langle x(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle = a_{j+1}(k)$$

$$\text{右边} = \langle x(t), \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n - 2k) \phi_{j,n}(t) \rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n - 2k) \langle x(t), \phi_{j,n}(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j(n) h_0(n - 2k)$$

这样，左边等于右边，有

$$a_{j+1}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j(n) h_0(n - 2k)$$

于是 (4.6.1a) 式得证。。

现在我们来理解一下 (4.6.1) 式的涵义：

设  $j = 0$ ， $a_0(k)$  是  $x(t)$  在  $V_0$  中由正交基  $\phi(t - k)$  作分解的系数，它是在  $V_0$  中对  $x(t)$  所作的离散平滑逼近。将  $a_0(k)$  通过一滤波器后得到  $x(t)$  在  $V_1$  中的离散平滑逼近

$a_1(k)$ 。该滤波器是将  $h_0(k)$  先作一次翻转，得  $h_0(-k) = \bar{h}_0(k)$ ，然后  $a_0(k)$  再和  $\bar{h}_0(k)$  作卷积运算。(4.6.1a) 式中出现的  $\bar{h}_0(2k)$ ，正体现了二抽取环节，如图 4.6.1(a) 所示。(4.6.1b) 式的输入、输出关系如图 4.6.1(b) 所示。假定我们从  $j=0$  级开始分解，将图(a)和(b)合起来后即是图(c)。

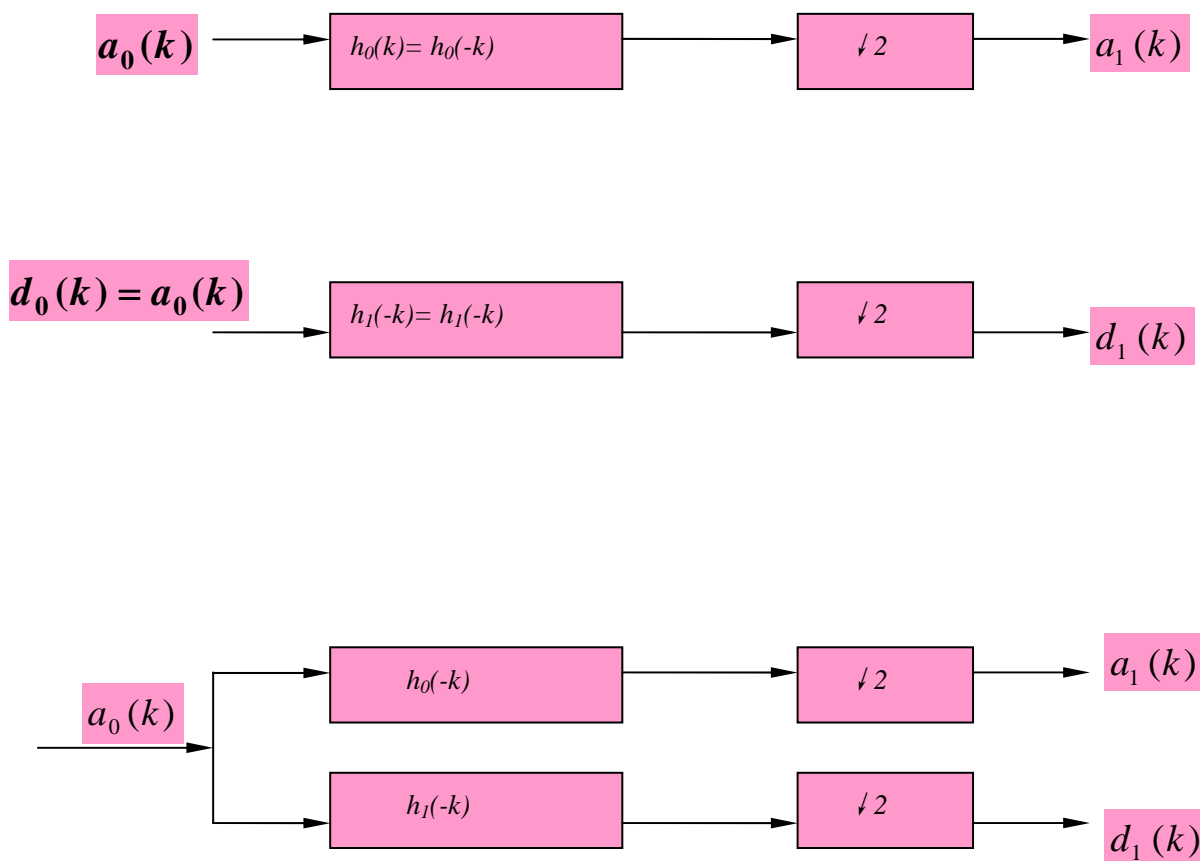


图 4.6.1 (4.6.1) 式的网络结构 (a) 低通分解 (b) 高通分解, (c) 二者的结合

如果我们令  $j$  由 0 逐级增大，我们即得到多分辨率的逐级实现，如图 4.6.2 所示。该图所反映的过程（也即 (4.6.1) 式）即是 Mallat 算法，也即小波变换的快速实现。

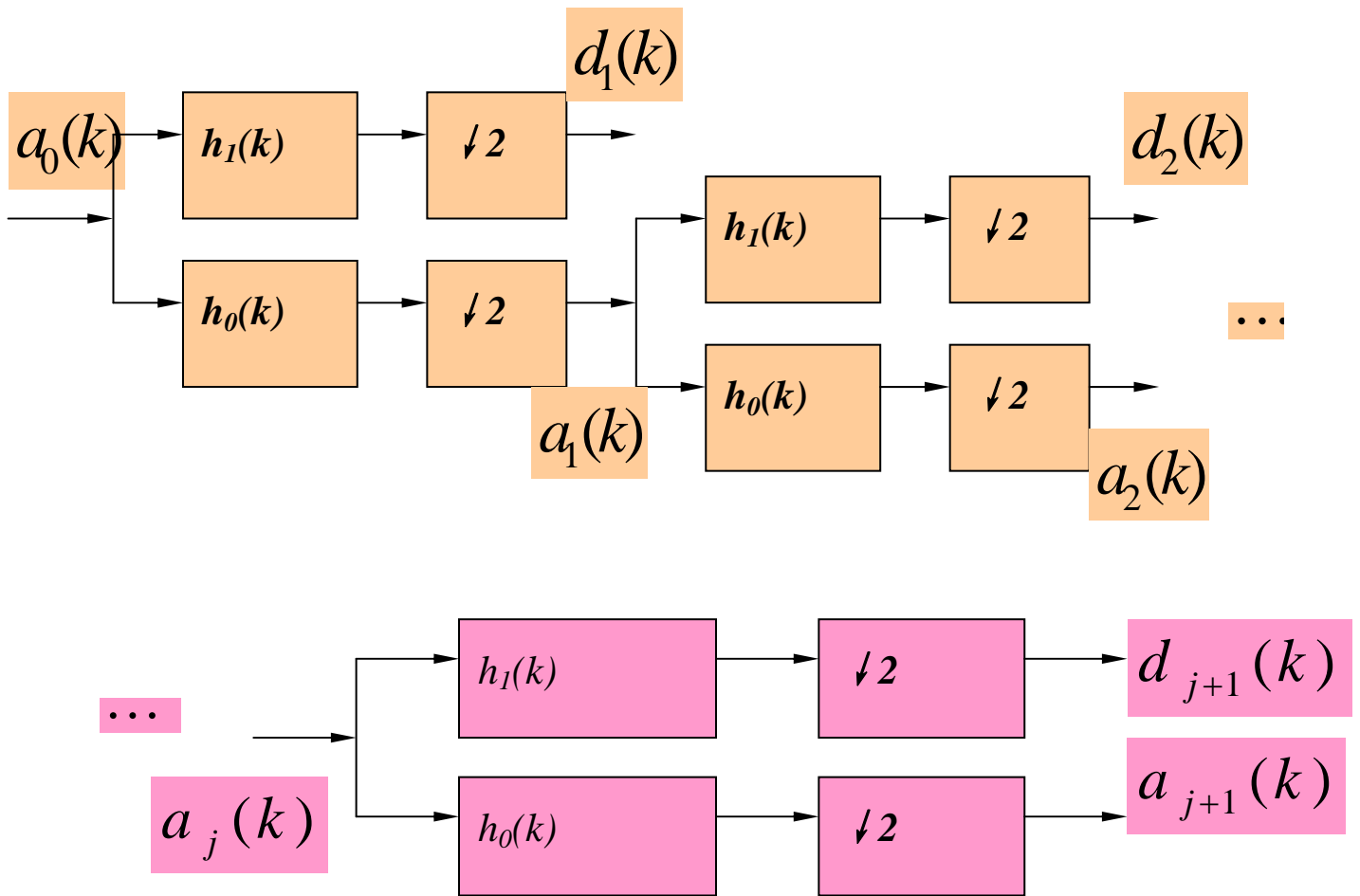


图 4.6.2 多分辨率分解的滤波器组实现

由(4.6.1)式及图4.6.2, 我们可以看出 Mallat 多分辨率分析的思路:

(1) 从滤波器组的角度看, 若  $h_0(-k)$  的频带在  $0 \sim \pi/2$ ,  $h_1(-k)$  的频带在  $\pi/2 \sim \pi$ , 那么,  $a_0(k)$  所处的频带是  $0 \sim \pi$ ,  $a_1(k)$  在  $0 \sim \pi/2$ ,  $d_1(k)$  在  $\pi/2 \sim \pi$ ; 对  $a_1(k)$  再分解后,  $a_2(k)$  在  $0 \sim \pi/4$ , 而  $d_2(k)$  在  $\pi/4 \sim \pi/2$ 。这就实现了对频带的逐级剖分。按这样的方式剖分, 一方面保证了各子频带的恒 Q 性, 另一方面又保证了  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  在各级的不变性;

(2) 若记  $a_0(k)$  所处的频带为空间  $V_0$ ,  $a_1(k)$  处于  $V_1$ ,  $d_1(k)$  处于  $W_1$ , 由它们频带的性质, 显然,  $V_0 = V_1 \oplus W_1, V_1 \perp W_1$ ,  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j, V_j \perp W_j, j = 1 \sim \infty$ , 同时, 有

$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_j \oplus V_j, j \in Z$$

当  $j \rightarrow \infty$  时,  $a_j(k)$ ,  $d_j(k)$  占据的空间 (也即频带) 趋于无穷小, 因此必有  $\{V_j\}_{j \rightarrow \infty} = \{0\}$ , 当然, 这时的分辨率最差, 因此  $P_j x(t)|_{j \rightarrow \infty} = 0$ 。这就是我们在多分辨率分析中所讨论的主要思想;

(3) 将多分辨率分解归结到图 4.6.2 来实现, 这就把对离散信号的小波变换归结到逐级的线性卷积来实现。若  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$  的系数不是太长, 卷积可在时域直接实现。

下面讨论信号的重建问题, 也即小波反变换。

定理 4.7 若  $a_{j+1}(k)$ ,  $d_{j+1}(k)$  按(4.6.1)式得到, 则  $a_j(k)$  可由下式重建:

$$a_j(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{j+1}(k)h_0(k-2n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j+1}(k)h_1(k-2n) \quad (4.6.4)$$

证明: 由于  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ ,  $\phi_{j+1,k}(t) \in V_{j+1}$ ,  $\psi_{j+1,k}(t) \in W_{j+1}$ . 因此,  $V_j$  中的任一函数  $\phi_{j,k}(t)$  可按如下方式分解:



$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j+1,n} \rangle \phi_{j+1,n}(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{j,k}, \psi_{j+1,n} \rangle \psi_{j+1,n}(t) \quad (4.6.5)$$

由定理 4.4 的证明, 有

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j+1,n} \rangle = h_0(k-2n) \quad (4.6.6a)$$

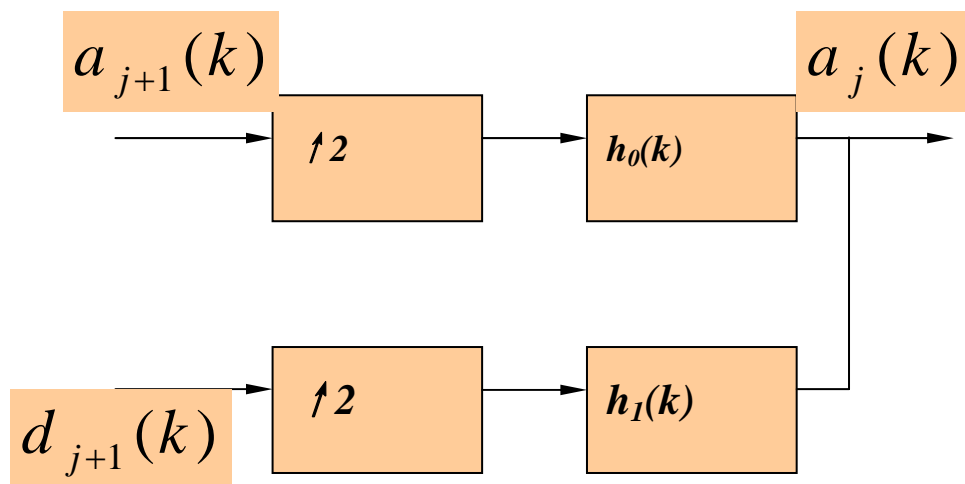
$$\langle \phi_{j,k}, \psi_{j+1,n} \rangle = h_1(k-2n) \quad (4.6.6b)$$

将它们代入 (4.6.5) 式, 有

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{j+1,n}(t) h_0(k-2n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{j+1,n}(t) h_1(k-2n) \quad (4.6.7)$$

将该式两边对  $x(t)$  作内积, 即产生 (4.6.4) 式, 于是定理得证。

(4.6.4) 式所对应的网络结构如图 4.6.3a 所示。若  $j$  由  $j$  递减, 则整个的重建过程如图 4.6.3b 所示, 它正好是图 4.6.2 的逆过程。不过在分解的过程中,  $h_0$  和  $h_1$  要先作翻转, 而在重建过程中,  $h_0, h_1$  不作翻转。分解时存在二抽取, 而在恢复过程中存在二插值。由 (4.6.4) 式及图 4.6.3 可以看出, 在用正交小波对信号作多分辨率分解与重建的过程中, 分解和重建所用的滤波器是相同的, 即都是  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$ 。



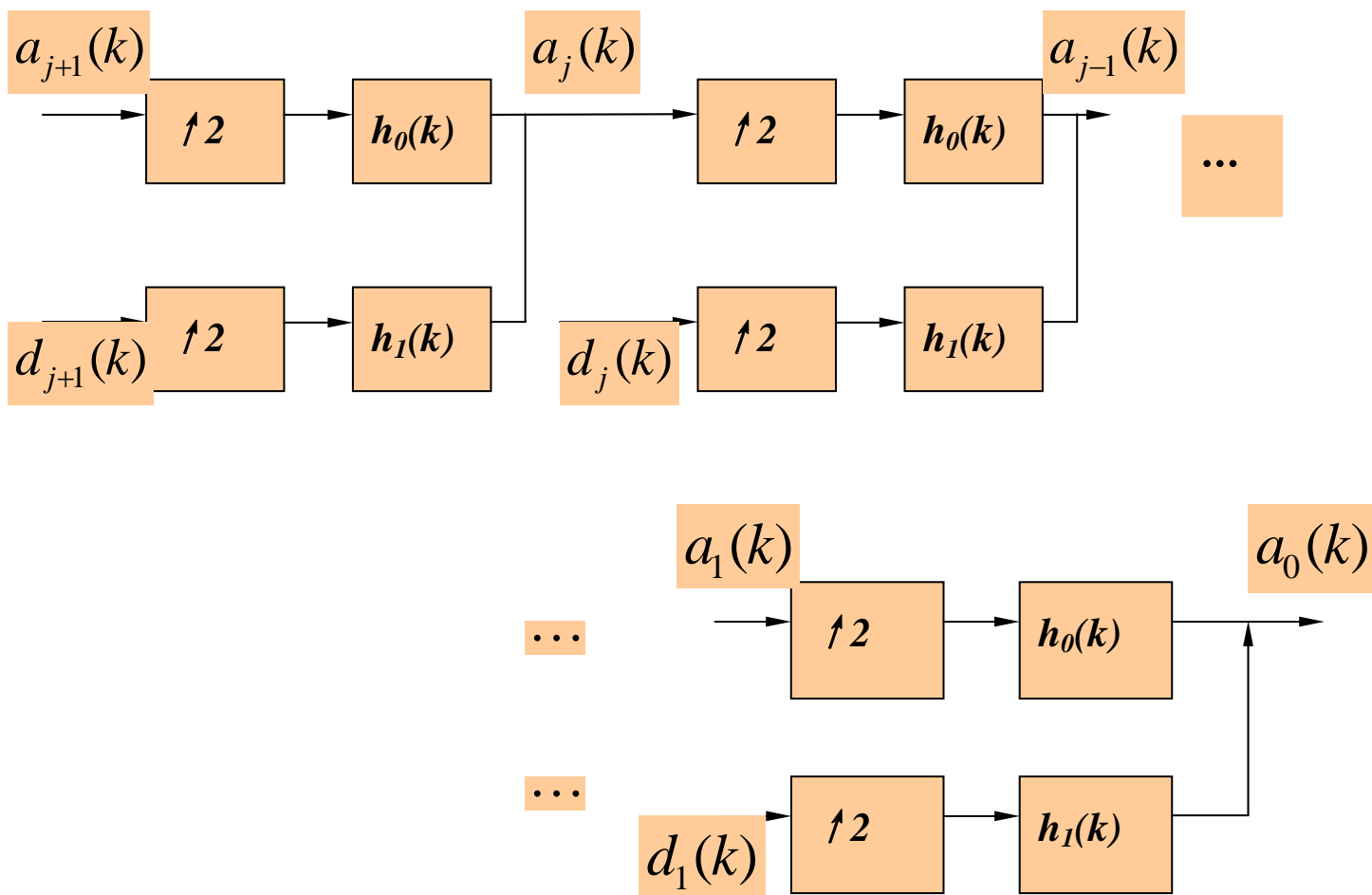


图 4.6.3 小波逆变换, (a) 第  $j$  级, (b)  $j$  由  $j$  至 0 的过程

## 4.7 Mallat 算法的实现

以上各节讨论了 Mallat 算法的定义,  $V_j$  及  $W_j$  中正交基的存在性以及用滤波器组实现小波算法的一系列问题。但在具体实现时, 尚有一些具体的问题要解决。这主要是初始化问题和在分解过程中数据逐渐减少的问题。

### 1. 初始化问题。

观察图 4.5.2, 在  $V_0$  空间, 我们假定  $a_0(k)$  是已知的, 并由此实现  $j=1,2,\dots$  的逐级分解。但实际上  $a_0(k)$  是未知的, 并且在图中的分解过程中, 也并没出现要分析的离散信号  $x(n)$ 。

由 (4.3.3) 式, 有

$$a_0(k) = \langle x(t), \phi(t-k) \rangle = \int x(t)\phi^*(t-k)dt \quad (4.7.1)$$

因此,  $a_0(k)$  只是  $V_0$  中对  $x(t)$  的离散逼近, 它并不等于  $x(t)$  的抽样  $x(n)$ 。至今, 人们已提出了很多由  $x(n)$  求解  $a_0(k)$  的方法, 如:

(1) 由 Shannon 抽样定理引出  $a_0(k)$  和  $x(n)$  的关系:

因为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\text{Sinc}(t-n)$$

将其代入 (4.7.1) 式, 有

$$a_0(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int \text{Sinc}(t-n)\phi(t-k)dt$$

若把  $\text{Sinc}(t-n)$  近似为  $\delta$  函数, 有

$$\begin{aligned}
 a_0(k) &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int \delta(t-n)\phi(t-n)dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\phi(n-k)
 \end{aligned}
 \tag{4.7.2}$$

即  $a_0(k)$  是  $x(n)$  和尺度函数  $\phi(t)$  的离散序列  $\phi(n)$  的卷积。

(2) 由  $\phi(n)$  的逆滤波器求  $a_0(k)$  :

在  $V_0$  中,  $x(t)$  可用正交基  $\phi(t-k)$  来分解, 分解系数为  $a_0(k)$ , 即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_0(k)\phi(t-k) \tag{4.7.3}$$

对  $t$  取离散值  $n$ , 并令  $x_d(n) = x(n)$ ,  $\phi_d(n) = \phi(n)$ , 对固定时刻  $t = p$ , (4.7.3) 式可变成

$$x_d(p) = a_0(k) * \phi_d(p)$$

令  $\Phi_d(\omega)$  为  $\phi_d(n)$  的傅里叶变换, 并令  $\Phi_d^{-1}(\omega) = 1/\Phi_d(\omega)$ , 则  $\Phi_d^{-1}(\omega)$  对应的时间序列为  $\phi_d^{-1}(n)$ ,

即

$$a_0(k) = x_d * \phi_d^{-1}(k) \tag{4.7.4}$$

不过上述两种方法均需耗费太多的计算, 使用起来很不方便。现在通用的简便方法即是假定

$$a_0(k) = x(k)$$

MATLAB 中 Wavelet Toolbox 中有关的程序如 DWT 即是按此思路给定的。

## 2. 数据逐级减少问题

在图 4.5.2 中, 由于每一级  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  后都有一个二抽取环节, 这样, 每一级分解后  $d_{j+1}(k)$  和  $a_{j+1}(k)$  的数据就要比  $d_j(k)$  和  $a_j(k)$  减少一半。当  $j$  较大时, 数据量的减少也是很

可观的。对此，我们也可采用不同的方法来处理数据。如：

### (1) 逐点计算

观察图 4.5.2，对每一级  $H_1(z)$  的输出，若取消其后的二抽取环节，则该级的  $d_j(k)$  的数据量将比抽取前多一倍。但这时，仍要解决前一级的  $a_{j-1}(k)$  的减少问题。

对  $H_0(z)$  的输出，其后的二抽取环节是保留其偶序号项，舍弃其奇序号项。若我们不舍弃其奇序号项，而是仍让其参加下一级的分解，如图 4.7.1 所示。

在该图中，在第  $j-1$  级， $H_0(z)$  的输出分成两部分，一部分是偶序号项的  $a_{j-1}^{(e)}(k)$ ，一部分是奇序号项的  $a_{j-1}^{(o)}(k)$ ，二者各送入一个两通道滤波器组，各自  $H_1(z)$  的输出分别记作  $d_{j-1}^{(e)}(k)$  和  $d_{j-1}^{(o)}(k)$ ，将二者按时间顺序交替合成即是该级的细节逼近  $d_j(k)$ 。其余各级类推。不过，这样做的结果是增加了计算量。

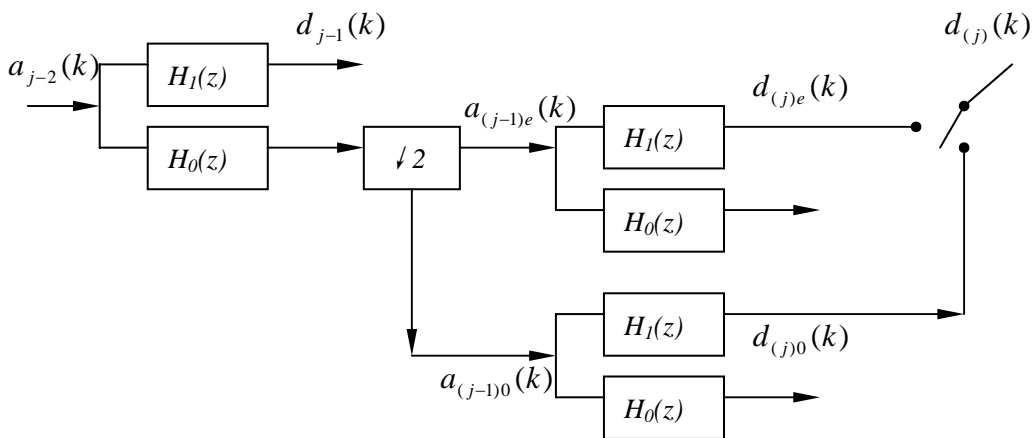


图 4.7.1 保持  $H_1(z)$  输出数据不减少的措施

## (2) 采用“多孔算法 (A trous algorithm)”

再次观察图 4.5.2，每一级的  $d_j(k)$  都是由上一级的  $a_j(k)$  通过  $H_1(z)$  作二抽取后的输出。若不考虑图中  $\bar{h}_0(k)$ 、 $\bar{h}_1(k)$  和  $h_0(k)$ 、 $h_1(k)$  的翻转关系，即把该图方框中的滤波器都记作  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$ ，那么，对  $d_3(k)$ ，其信号流图如图 4.7.2 所示。利用 5.6 节的恒等变换关系，图 4.7.2 又可表为图 4.7.3。

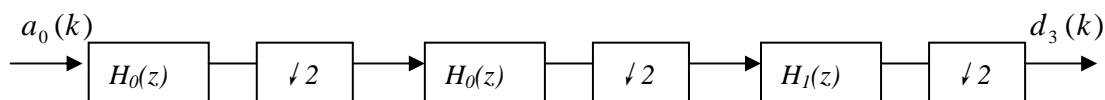


图 4.7.2 求出  $d_3(k)$  的等效信号流图

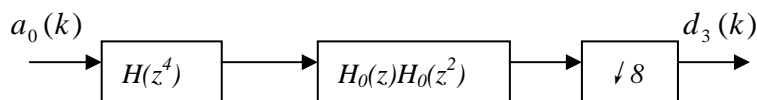


图 4.7.3 图 4.7.2 的等效表示

图中  $H_1(z^4)$  是将  $h_1(n)$  每两个点之间插入三个零得到的新滤波器。同理， $H_0(z^2)$  是  $h_0(n)$  每两个点插入一个零后所得到的新滤波器。这样就把每一级的抽取移到了最后。这样即可保

证总的的数据（即  $d_3(k)$ ）不会逐级减少，而且有效地实现了 Mallat 算法。由于  $H_1(z^4)$ 、 $H_0(z^2)$  是使原  $h(n)$  中补零，使“空隙”增大，因此，该算法被称之为“多孔”算法。一个用多孔算法实现三级分解的 Mallat 算法流程如图 4.7.4 所示。

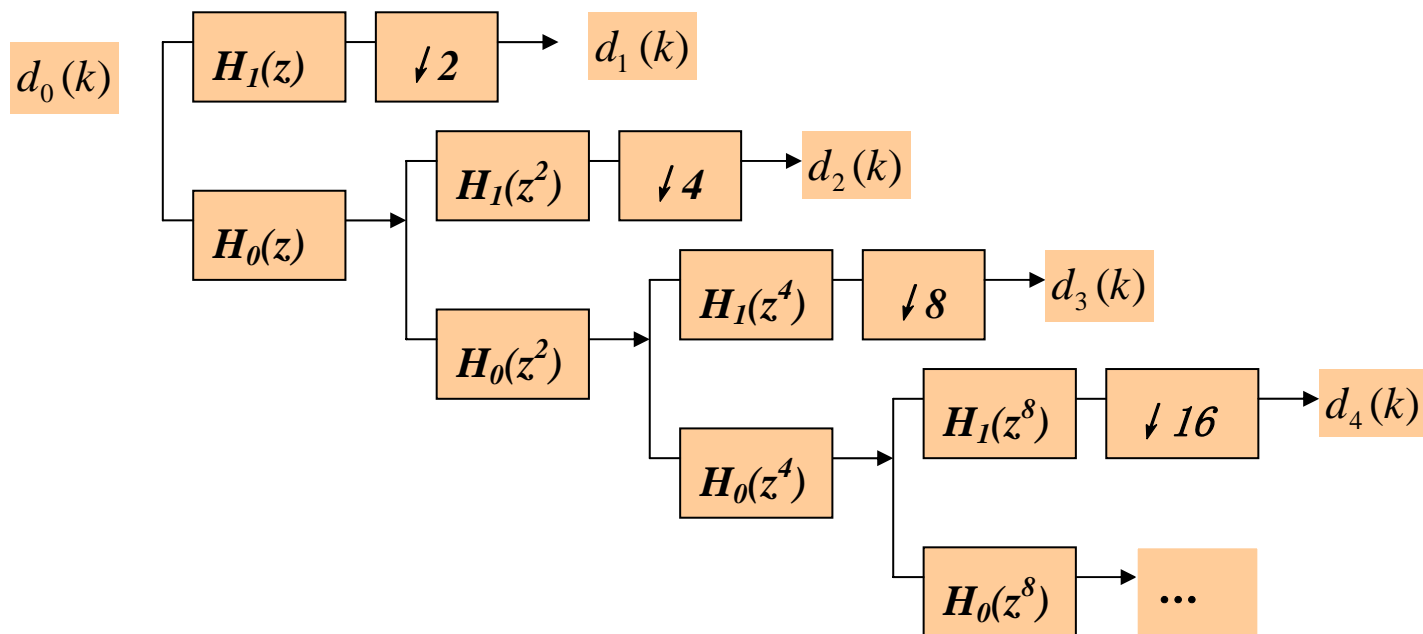


图 4.7.4 实现 Mallat 算法的“多孔算法”

## 4.8 小波变换小结

至今，我们已讨论了连续小波变换、离散栅格上的小波变换及小波变换的 Mallat 算法。现对以上内容作简要的总结。

### 1. 连续小波变换 (CWT)

$$WT_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (4.8.1)$$

式中  $\psi(t)$  是小波函数， $a$  是尺度变量， $b$  是位移变量。其计算方法可用数值积分，或基于 CZT，或基于梅林变换的快速算法。使用 CWT 的好处是  $a$  可取非整数值，即按实际分辨率的需要取粗或取细；

### 2. 离散栅格上的小波变换 (DWT)

$$WT_x(a_0^j, kT_0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = d_{j,k} \quad (4.8.2)$$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (4.8.3)$$

式中  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  是  $\psi_{j,k}(t)$  的对偶小波。若  $\psi_{j,k}(t)$  是正交小波，则  $\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \psi_{j,k}(t)$ ，(4.8.3) 式称为小波级数， $d_j(k)$  为小波系数。

在 DWT 中，时间  $t$  仍是连续的，这和我们以前学过的 DFT、DCT 等有着本质的不同。

若取  $a_0 = 2$ ， $b = 2^j kb_0$ ，并令  $b_0 = 1$ ，则 (4.8.2) 式就变成了二进制小波变换：



$$\begin{aligned}
 WT_x(j, k) &= WT_x(2^j, 2^j k) \\
 &= 2^{-j/2} \int x(t) \psi^*(2^{-j} t - k) dt = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle
 \end{aligned} \tag{4.8.4}$$

### 3. 离散序列的小波变换 (DSWT)

由于在实际工作中，计算机所处理的信号总是离散的，即  $x(t)$  应取  $x(n)$ ， $\psi(t)$  也应取为  $\psi(n)$ 。所以，读者一定会问：为什么至今看不到 (4.8.2) 或 (4.8.3) 式的离散形式？例如，对 (4.8.4) 式，若将  $t$  离散化，取  $t = nT_s$ ， $T_s = 1$ ，有

$$WT_x(2^j, 2^j k) = 2^{-j/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \psi^*(2^{-j} n - k) \tag{4.8.5}$$

此式应视为 DSWT。但将该式用于实际工作中去会有几个困难：

除少数的母小波外，小波  $\psi$  一般无闭合的表达式，所以不易简单地利用  $t = nT_s$  来得到离散小波；

(2) 当将  $\psi(t)|_{t=nT_s} = \psi(n)$ ，或  $\phi(t)|_{t=nT_s} = \phi(n)$  时，由于要实现尺度的伸缩，那么  $2^{-j} n = n/2^j$  不一定会是整数，这样 (4.8.5) 式的实现就不现实；

(3) 当  $x(n)$  产生移位，即  $x(n)$  变成  $x(n-l)$  时，由 (4.8.5) 式

$$\begin{aligned}
 &2^{-j/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-l) \psi^*(2^{-j} n - k) \\
 &= 2^{-j/2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \psi^*(2^{-j} i - (k - 2^{-j} l))
 \end{aligned} \tag{4.8.6}$$

显然，只有当  $l$  是  $2^j$  的整数时，(4.8.6) 式才具有移不变性。而在多数情况下， $x(n)$  作移位时，按 (4.8.5) 式求出的小波变换往往不具有移不变性。

由于上述原因，对离散序列的小波变换必须要采用特殊的方法来实现。这一实现，即

是 Mallat 算法。尽管本章导出多分辨率分析时使用的始终是 (4.8.4) 式, 即  $x(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\phi(t)$  都是连续的, 但最后归结为离散的滤波器系统 (即  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$ ) 来实现, 只要我们假定  $a_0(k) = x(t)|_{t=kT_s} = x(k)$ , 则离散序列的小波变换便迎刃而解, 从而避免了上述的三个困难。所以, 我们把 Mallat 算法就称为 DSWT。

4. 也许读者会问, 在 CWT 中我们讨论过的小波函数  $\psi(t)$  以及它的伸缩和移位, 在 DSWT 中又体现在哪儿? 这是一个很有意义的问题。比较 CWT、DWT 及以 Mallat 算法为代表的 DSWT, 我们会看到其中内在的相似性及联系:

(1) 在 DWT, 特别是在 Mallat 算法中引入的尺度函数  $\phi(t)$  是低通的, 小波  $\psi(t)$  当然是带通的。对应的,  $H_0(z)$  是低通的,  $H_1(z)$  是高通的;

(2) 正交基的情况下,  $\phi_{j,k}(t)$  是正交的,  $\psi_{j,k}(t)$  是正交的。  $\phi_{j,k}(t)$  和  $\psi_{j,k}(t)$  之间也是正交的, 对应的,  $H_0(z)$ ,  $H_1(z)$  满足共轭正交滤波器组的要求。它们对应的  $h_0(n)$ 、 $h_1(n)$ , 其偶序号移位具有正交性

$$(3) \text{ 由 (4.3.17) 式 } d_j(k) = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int x(t) \psi_{j,k}^*(t) dt \quad (4.8.7)$$

是  $x(t)$  在分辨率  $2^{-j}$  情况下的小波变换, 由 (4.5.7b) 式,

$$d_j(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{j-1}(n) h_1(n-2k) = a_{j-1}(k) * \bar{h}_1(2k) \quad (4.8.8)$$

这样, 在 Mallat 算法中, 小波变换  $d_j(k)$  由第  $j$  级的高通滤波器  $H_1(z)$  的输出得到;

(4) 观察图 4.6.2 和 4.6.3, 将  $h_1(n)$  作四倍插值得  $H_1(z^4)$ ,  $H_1(e^{j\omega})$  也变成  $H_1(e^{j4\omega})$  即, 频带压缩了四倍, 同理  $H_0(z)$  变成  $H_0(z^2)$ , 则  $h_0(n)$  作了二倍的插值, 这些都体现了小波变换中尺度  $a$  伸缩的作用。只不过这些伸缩不是由尺度  $a$  直接实现的, 而是由  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  来

实现的。